UNIVERZA V LJUBLJANI

FAKULTETA ZA DRUŽBENE VEDE

Simona Pustavrh

STRATEGIJA OPTIMALNEGA RAZPOREJANJA TELEFONSKIH KLICEV

Magistrsko delo

Ljubljana, 2006

Kazalo

Kazalo tabel

Kazalo slik

1. UVOD

Telefonsko anketiranje sodi med najbolj razširjene načine anketiranja. V primerjavi z osebnim anketiranjem ima veliko prednosti, predvsem nizke stroške, enostavno pokritje širšega geografskega območja, manjše število potrebnih anketarjev, hitro pridobljene podatke in rezultate raziskave, možnosti računalniško podprtega anketiranja s kompleksnimi vprašalniki. Kljub mnogim prednostim se pri samem zbiranju podatkov pojavljajo različne težave, kot so problem nepokritja nekaterih geografskih območij s telefonskimi priključki, vse večja uporaba mobilne telefonije, nepripravljenost ljudi za sodelovanje v telefonskih anketah, veliko število neuspešno kontaktiranih telefonskih številk (npr. zasedena telefonska številka, zvonjenje v prazno).

Pričujoče delo podrobno obravnava problem razporejanja telefonskih klicev, s katerim se anketarji vsak dan srečujejo pri svojem delu.

Privzeli bomo, da klicanje poteka v več zaporednih dneh, ki jih bomo imenovali koraki, na vsakem koraku pa je na voljo več delovnih izmen (npr. popoldan, zvečer), znotraj katerih lahko razporedimo klice, in sicer tako, da v prvem koraku pokličemo vse telefonske številke, s katerimi želimo v raziskavi vzpostaviti kontakt, v drugem koraku vse tiste telefonske številke, s katerimi v prvem koraku nismo uspeli vzpostaviti kontakta, v tretjem koraku zopet vse tiste, s katerimi nismo uspeli vzpostaviti kontakta v drugem koraku itd. Privzeli bomo tudi, da je na vsakem koraku število klicev, ki jih lahko opravimo v posamezni izmeni, omejeno in znano vnaprej.

Dosedanje raziskave so pokazale, da na uspešnost poskusa vzpostavitve kontakta vpliva veliko dejavnikov (npr. termini in izidi klicev v predhodnih korakih, število predhodnih klicev, čas, ki je minil od zadnjega poskusa vzpostavitve kontakta), zato je pomembno, kako so klici na posameznem koraku razporejeni po izmenah.

Anketar bi se lahko samostojno odločil, kako bo razporedil telefonske številke. Vsak klic bi opravil takrat, ko bi pričakoval, da bo največja verjetnost kontakta. Ker pa na uspešnost kontaktiranja vpliva veliko dejavnikov, bi moral anketar, ki bi klice razporejal le na podlagi izkušenj in po občutku, za željeno stopnjo anketiranja opraviti veliko število klicev, saj bi moral neuspešno kontaktirane klice, ki bi jih bilo veliko, večkrat ponoviti. Tako je smiselno oblikovati strategijo, ki na vsakem koraku omogoča optimalno razporeditev neuspešno kontaktiranih telefonskih klicev po izmenah tako, da bo pri čim manjšem številu opravljenih klicev število uspešno kontaktiranih klicev čim večje. Na tem področju je bilo v zadnjih desetletjih opravljenih veliko študij, v katerih so raziskovalci uporabili različne metode in pristope, vendar je problem še vedno povsem odprt.

Glavni cilji pričujočega dela so naslednji:

- oblikovati matematični model za optimalno razporejanje telefonskih klicev, ki zagotavlja maksimalno pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev;
- pokazati, da lahko problem na vsakem koraku zapišemo kot klasičen transportni problem linearnega programiranja;
- s pomočjo simulacij preveriti, če je razporejanje telefonskih klicev z oblikovano optimalno strategijo res učinkovitejše kot z naključnim razporejanjem, ko se anketar samostojno na podlagi svojih izkušenj odloči, kdaj bo ponovno poklical telefonsko številko, s katero ni uspel vzpostaviti kontakta.

Za uspešno reševanje praktičnih problemov je pomemben sistematičen pristop, zato je moje delo potekalo v več korakih:

- definicija in analiza predmeta preučevanja (razporejanje telefonskih klicev);
- študij strokovne literature s področja telefonskega anketiranja;
- pregled raziskav, ki so bile že opravljene na področju razporejanja telefonskih klicev;
- študij strokovne literature s področja operacijskih raziskav s poudarkom na linearnem programiranju in markovskih odločitvenih procesih;
- postavitev matematičnega modela za razporejanje telefonskih klicev pri telefonskem anketiranju;
- analiza in evalvacija oblikovanega matematičnega modela;
- simulacije razporejanja telefonskih klicev pri telefonskem anketiranju in primerjava rezultatov.

Zaradi preglednosti je delo zastavljeno v naslednjem vsebinskem zaporedju:

V drugem poglavju je predstavljeno telefonsko anketiranje kot najpogosteje uporabljena metoda za zbiranje podatkov. Opisane so prednosti in slabosti telefonskega anketiranja v primerjavi z drugimi načini anketiranja. Kot poseben problem so izpostavljene težave pri vzpostavljanju kontaktov s klicanimi telefonskimi številkami, predstavljeni pa so tudi rezultati dosedanjih raziskav na tem področju.

Ker strategija razporejanja telefonskih klicev temelji na operacijskih raziskavah, so v tretjem poglavju najprej predstavljene operacijske raziskave kot veda, sledi klasifikacija procesov, omenjene so pomembne zgodovinske prelomnice v razvoju operacijskih raziskav, na koncu pa so predstavljeni še koraki operacijskega raziskovanja.

Četrto poglavje podrobno opisuje linearno programiranje, ki je ena najpogosteje uporabljenih metod operacijskih raziskav, še posebej pa je opisan transportni problem kot poseben primer linearnega programiranja. Optimalno rešitev linearnega programa lahko poiščemo z različnimi metodami, v pričujočem delu pa sta brez dokazov predstavljeni grafična metoda, ki jo uporabljamo, kadar v linearnem programu nastopata le dve spremenljivki, in metoda simpleksov, ki jo je leta 1947 razvil G. B. Dantzig.

V petem poglavju je oblikovan matematični model za optimalno razporejanje telefonskih klicev. Za sam proces razporejanja klicev je pokazano, da ga lahko na vsakem koraku obravnavamo kot markovski odločitveni proces, katerega optimalno rešitev poiščemo s transportnim problemom linearnega programiranja. Oblikovani model ne zajema vseh dejavnikov, ki vplivajo na uspešnost kontaktiranja, zato je na začetku poglavja privzetih nekaj predpostavk, ki problem poenostavijo, na koncu poglavja pa je v analizi modela nakazano, kako bi ga lahko uporabili tudi v bolj kompleksnih situacijah.

Zadnje poglavje je empirični del, ki zajema simulacijo, s katero je po korakih prikazana oblikovana optimalna strategija razporejanja telefonskih klicev. Za preverjanje učinkovitosti oblikovane optimalne strategije je narejena še simulacija naključnega razporejanja telefonskih klicev, ki ustreza anketarjevi samostojni odločitvi, kako bo razporedil klice.

Pri oblikovanju modela se je izkazalo, da je potrebno definirati dve novi matrični operaciji, in sicer specifičen produkt vektorja z matriko in specifičen produkt dveh matrik. Obe operaciji sta definirani in prikazani v prilogi.

2. TELEFONSKO ANKETIRANJE

V poglavju je najprej predstavljeno anketiranje kot raziskovalna metoda in načini anketiranja, ki se v praksi najpogosteje uporabljajo. Ker je tema pričujočega dela razporejenje telefonskih klicev, so v nadaljevanju opisane prednosti in slabosti telefonskega anketiranja v primerjavi z ostalimi načini, posebna pozornost pa je namenjena problematiki pri razporejanju telefonskih klicev in rezultatom raziskav, ki so bile na tem področju že opravljene.

2.1 Anketiranje kot raziskovalna metoda

Anketiranje oziroma anketno raziskovanje (*angl. survey*) je pogosto uporabljana metoda za zbiranje podatkov na različnih področjih, predvsem v marketinških, akademskih in uradnih raziskavah. Zelo znane so socialnopsihološke in javnomnenjske raziskave, raziskave trga, medicinske študije, raziskave stališč, raziskave dosega medijev. Anketiranje, ki poteka s standardiziranimi vprašalniki, torej uporabimo, kadar želimo pridobiti informacije o mnenjih, odnosih, namenih in pričakovanjih ljudi ter o dogodkih iz preteklosti in jih ne moremo pridobiti drugače kot z izpraševanjem ljudi. Pri anketiranju imenujemo ljudi, ki jih izprašujemo, izprašanci ali anketiranci, izvajalci ankete pa so anketarji.

Čeprav je anketiranje na videz preprosta metoda za zbiranje podatkov, se moramo zavedati tudi dejavnikov, ki vplivajo na kakovost in količino pridobljenih podatkov. Ljudje pogosto niso pripravljeni odgovarjati na anketna vprašanja, ker ne zaupajo svojih podatkov ali pa je že prevelika zasičenost z anketami na posameznih področjih. Prav tako niso pripravljeni sodelovati, če so jih prepogosto nadlegovali s telefonsko prodajo ali prodajo po terenu. Poseben problem nastopi, kadar ljudje ne poznajo področja, ki se ga raziskuje, in je med odgovori veliko odgovorov tipa 'ne vem' ali 'ne poznam', lahko pa si tudi drugače razlagajo vprašanja, kot si jih je zamislil raziskovalec, in so zato podatki, ki nam jih podajo, slabše kakovosti ali napačni. Lahko pa se zgodi, da ljudje namerno zavajajo raziskovalce s podajanjem napačnih odgovorov. Kljub temu, da je težko ugotoviti, kdaj pride do takšnih situacij, je anketiranje še vedno glavna metoda za pridobivanje informacij (Dimovski, Pengar in Škerlavaj [5]).

Pri anketiranju je poleg določitve ciljev raziskave pomembno natančno definirati ciljno populacijo, ki je množica vseh enot, ki jih želimo proučevati. Zbiranje podatkov od vseh enot populacije je zaradi njene velikosti ponavadi zelo drago, pogosto celo nemogoče ali pa zahteva veliko časa, zato izvedemo raziskavo le na delu populacije, ki ga imenujemo vzorec.

Pri izbiri enot v vzorec je zelo pomembno zagotoviti slučajnost izbora enot iz populacije, pri čemer ločimo verjetnostne vzorce, pri katerih ima vsaka enota populacije vnaprej znano in neničelno verjetnost, da se pojavi v vzorcu, in neverjetnostne vzorce, pri katerih ta pogoj ni izpolnjen. Za statistično sklepanje, kot so preverjanje domnev o parametrih in o njihovih porazdelitvah ali za določevanje intervalov zaupanja parametrov populacije, je nujno zagotoviti verjetnostne vzorce. V praksi se je uveljavilo več učinkovitih tehnik verjetnostnega vzorčenja, najpogosteje pa se uporabljajo sistematično vzorčenje, stratifikacija, večstopenjsko vzorčenje in vzorčenje z verjetnostjo, ki je sorazmerna velikosti enot (Kalton in Vehovar [17]).

2.2 Načini anketiranja

Anketiranje, kot metodo za zbiranje podatkov, bi lahko definirali na več različnih načinov. V Statističnem terminološkem slovarju [18] je definirano kot "*statistično opazovanje na podlagi vnaprej pripravljenih vprašanj navadno pri izbranih osebah, npr. osebno, poštno, telefonsko, računalniško anketiranje ali kombinacija več načinov zbiranja podatkov*".

Iz definicije lahko razberemo, da obstaja več različnih načinov anketiranja. Najpogosteje uporabljeni načini so:

- **Osebno anketiranje** (*angl. face-to-face*), pri katerem anketar obišče anketiranca na njegovem domu, ga osebno izpraša in zapiše njegove odgovore. Pri osebnem anketiranju je anketar vedno prisoten, kar pomeni, da je z anketirancem vzpostavljen direktni kontakt.

- **Telefonsko anketiranje**, pri katerem anketar pokliče anketiranca po telefonu, mu postavlja anketna vprašanja in zapisuje njegove odgovore. Anketar anketiranca izpraša torej indirektno, ker ni osebno prisoten.

- **Poštno anketiranje**, pri katerem anketiranec prejeme vprašalnik v tiskani obliki z običajno pošto ali v elektronski obliki po elektronski pošti. Izpolnjeni vprašalnik anketiranec vrne na enak način, kot ga je prejel. Anketiranec izpolnjuje anketni vprašalnik samostojno, brez pomoči anketarja, kar imenujemo samoanketiranje.

- **Spletno anketiranje** (*angl. web surveys*), pri katerem je anketni vprašalnik objavljen na spletni strani, anketiranci pa do njega dostopajo s klikom na povezavo do njegovega spletnega naslova in ga izpolnijo, če želijo. Tudi ta način anketiranja sodi med samoanketiranje.

- **Mešan način anketiranja**, pri katerem lahko kombiniramo dva ali tri načine anketiranja, lahko tudi več. Najpogosteje srečamo mešan način pri panelnih raziskavah, pri katerih se na istih vzorčnih enotah opravi ista anketa v večih zaporednih časovnih obdobjih. Tako se prvo izvajanje ankete opravi osebno, vsa naslednja pa ponavadi telefonsko. Lahko bi našli tudi primere, pri katerih bi uporabili kombinacijo telefonske in poštne ankete ipd.

V zadnjih tridesetih letih so telefonsko, osebno in poštno anketiranje podprli z računalniško tehnologijo (Biemer in Lyberg [1]). Telefonsko anketiranje s pomočjo računalnika (*angl. Computer Assisted Telephone Interviewing* - CATI) in osebno anketiranje s pomočjo računalnika (*angl. Computer Assisted Personal Interviewing* - CAPI) potekata s pomočjo elektronsko oblikovanega anketnega vprašalnika tako, da anketar bere vprašanja in sproti vnaša odgovore v računalnik, kar omogoča hitro zbiranje in obdelavo podatkov. Vprašalniki so popolnoma avtomatizirani, ker lahko že vnaprej definiramo vse preskoke in sklope, na katere odgovarjajo posamezni anketiranci. Pri poštnem anketiranju je računalniško podporo mogoče izkoristiti s pošiljanjem anketnih vprašalnikov po elektronski pošti ali na disketi z običajno pošto. Poleg opisanih načinov anketiranja se vse pogosteje uporabljajo tudi spletne ankete, ki omogočajo uporabo grafičnih in multimedijskih dodatkov pri oblikovanju anketnega vprašalnika. Spletne ankete objavljajo na svojih spletnih straneh različne organizacije in podjetja, ki jih zanima mnenje ljudi, ki so hote ali nehote prišli na njihovo spletno stran, zato ne moremo govoriti o verjetnostnih vzorcih. Anketirance lahko povabimo k sodelovanju v spletnih anketah tudi s sporočilom po elektronski pošti, vendar le, če so že prej privolili v sodelovanje v tovrstnih anketah.

Uspešnost anketiranja merimo z različnimi kazalci, za katere potrebujemo natančne definicije. V nadaljevanju bomo potrebovali predvsem pojme stopnja odgovorov, stopnja kontaktiranja in stopnja sodelovanja, katerih definicije bomo povzeli po *Ameriškem združenju javnomnenjskih raziskav* - AAPOR [28]:

- stopnja odgovorov je razmerje med številom enot z odgovori (enote, ki so izpolnile vprašalnik - respondenti) in številom vseh ustreznih enot iz vzorca,
- stopnja kontaktiranja je razmerje med številom kontaktiranih enot in številom vseh ustreznih enot iz vzorca,
- stopnja sodelovanja je razmerje med številom enot z odgovori in številom kontaktiranih enot.

2.3 Prednosti in slabosti telefonskega anketiranja

Telefonsko anketiranje je, zaradi številnih prednosti v primerjavi z ostalimi načini anketiranja, najpogosteje uporabljana oblika anketiranja. Med vsemi prednostmi velja posebej izpostaviti naslednje:

- Stroški telefonskega anketiranja so veliko nižji kot pri osebnem anketiranju in so nekoliko višji kot pri poštnem ali spletnem anketiranju, ki veljata za najcenejša načina anketiranja. Pri osebnem anketiranju velik del skupnih stroškov predstavljajo potni stroški anketarjev.
- Pokriti je mogoče širše geografsko območje kot pri osebnem anketiranju brez večjega porasta stroškov.
- Potrebnih je manj anketarjev kot pri osebnem anketiranju, ki so lahko zato bolj usposobljeni. S poslušanjem in snemanjem telefonskih pogovorov je omogočena učinkovita kontrola dela anketarjev.

- Podatki so zbrani in obdelani hitreje kot pri osebnem anketiranju, pri katerem večji del časa predstavlja potovanje anketarja do anketiranca, ali kot pri poštnem anketiranju, pri katerem je potrebno veliko časa, da anketiranec prejme pošto, izpolni vprašalnik in ga pošlje nazaj.

- Običajno je dosežena višja stopnja odgovorov na vprašanja, ki se nanašajo na občutljive teme, kot so alkoholizem, droge, spolnost, kot pri osebnem anketiranju, ker je anketirancem nelagodno odgovarjati osebno. Najvišjo stopnjo odgovorov na občutljiva vprašanja dobimo pri samoanketiranju (npr. poštne ali spletne ankete).

- Vpliv anketarja na odgovore anketiranca je pri telefonskem anketiranju manjši kot pri osebnem anketiranju, pri katerih lahko anketar vpliva na odgovore anketiranca s svojim obnašanjem in mimiko, pri telefonskem anketiranju pa je vpliv zaradi indirektnega kontakta anketarja z anketirancem manjši. Tudi v tem primeru so poštne ali spletne ankete primernješe.

Kljub pomembnim prednostim telefonskega anketiranja v primerjavi z ostalimi načini anketiranja ima le-to tudi pomanjkljivosti:

- Pri telefonskem anketiranju je ponavadi dosežena nižja stopnja odzivnosti kot pri osebnem anketiranju, saj ljudje težje zavrnejo osebni kot telefonski pogovor, ko preprosto odložijo slušalko, in višja odzivnost kot pri poštnem anketiranju, ko ljudje ankete ne izpolnijo in jo vržejo v koš.

- Pri telefonskem anketiranju ni mogoče uporabljati vizualnih pripomočkov kot so slike, zemljevidi in grafikoni, kar pomeni manjšo prilagodljivost kot pri osebnem, poštnem ali spletnem anketiranju.

- Pri telefonskem anketiranju morajo biti vprašanja preprosta, ne smejo ponujati preveč alternativ, ker si jih anketiranec ne zapomni. Pojavlja se več odgovorov tipa 'ne vem' ali 'brez odgovora' kot pri osebnem anketiranju.

- Pri telefonskem anketiranju morajo biti anketni vprašalniki časovno krajši (do 30 minut), pri osebnem ali poštnem anketiranju pa lahko trajajo tudi uro ali več.

- Vse več ljudi uporablja avtomatske telefonske tajnice ter kontrolo vhodnih številk, zato je pogosto težko vzpostaviti kontakt s klicano osebo. Zaradi porasta telefonske prodaje veliko ljudi ne dovoli objave svoje telefonske številke v imenikih. Prav tako je težava, če imeniki niso sproti ažurirani, ker v njih nastopa mnogo telefonskih številk, ki niso več v uporabi, nove telefonske številke pa še niso vnešene.

2.4 Predstavitev problematike pri razporejanju telefonskih klicev

Kot je bilo že omenjeno, je pri anketnem raziskovanju zelo pomembno zagotoviti verjetnostne vzorce, pri katerih ima vsaka enota populacije vnaprej znano in neničelno verjetnost, da se pojavi v vzorcu. Pri telefonskem anketiranju telefonske številke pripadajo gospodinjstvom in ne posameznim osebam. Če želimo opraviti anketo z eno od oseb gospodinjstva, potem moramo najprej poklicati gospodinjstvo, nato pa znotraj gospodinjstva na ustrezen način izbrati osebo, ki jo želimo anketirati (npr. metoda zadnjega rojstnega dne, Kishev postopek). Vzorčni okvir pri telefonskem anketiranju zato vedno vsebuje skupine oseb, razen v primeru enočlanskih gospodinjstev, ki pa jih je zelo malo. V nadaljevanju bomo s pojmom enota označili telefonsko številko, oseba pa bo član gospodinjstva.

Pri telefonskem anketiranju imajo vsi vzorci gospodinjstev enako verjetnost za izbor in prav tako vsako gospodinjstvo. Vzorci gospodinjstev torej ustrezajo pogojem SRS vzorčenja (*angl. Simple Random Sampling*) in s tem tudi EPSEM vzorčenju (*angl. Equal Probability Selection Method*). Tega pa ne moremo trditi za vzorce oseb. Vzorci oseb niso SRS vzorci, ker ne morejo biti v vzorec izbrane vse osebe istega gospodinjstva. Prav tako vzorci oseb niso EPSEM vzorci, ker so gospodinjstva različno velika in imajo osebe v različno velikih gospodinjstvih različne verjetnosti za izbor v vzorec.

Za slučajni izbor telefonskih številk obstaja več možnosti. Vzorčimo lahko iz tiskanih ali elektronskih telefonskih imenikov ter z računalniškim slučajnim izborom telefonskih številk (*angl. Random Digit Dialing* - RDD), s sistemom vnaprejšnje izbire (*angl. predictive dialing*), ko računalnik izbere telefonsko številko, počaka, da klicani dvigne slušalko, in ga šele nato poveže z anketarjem. Vsak od načinov izbire slučajnega vzorca ima prednosti in slabosti.

Ne glede na to, kako je bil izbran vzorec, želimo pri telefonskih anketah doseči čim višjo stopnjo kontaktiranja in čim višjo stopnjo odgovorov, da bi bila količina zbranih podatkov čim večja. Prvi korak, ki je potreben za kakovostno telefonsko anketiranje, je oblikovanje ustreznega vzorčnega okvirja, s katerim identificiramo enote ciljne populacije. Vzorčni okvir mora vključevati le ustrezne enote za raziskavo, zgodi pa se, da se razlikuje od ciljne populacije iz več razlogov. Med njimi naj omenimo podvojene zapise enot populacije, manjkajoče elemente populacije in neustrezne enote.

1. Manjkajoče enote populacije v vzorčnem okvirju so enote, ki jih iz različnih razlogov ni v vzorčnem okvirju. Pri telefonskem anketiranju obstaja več razlogov, kot so:

   - gospodinjstva brez telefona,
   - gospodinjstva, ki imajo le mobilni telefon,
   - tajne številke, če vzorčimo iz telefonskega imenika.

   Gospodinjstev brez telefona je zelo malo, zato je pristranskost ocen zaradi teh manjkajočih podatkov ponavadi zanemarljiva, razen v posebnih primerih, na katere moramo biti pozorni (npr. vprašanja o modemskem dostopu do interneta). V prihodnosti lahko pričakujemo širitev mobilne telefonije, ko bo vse več gospodinjstev, ki bodo imela le mobilni telefon, prav tako pa se pojavlja vse večje število tajnih številk.

2. Podvojeni zapisi v vzorčnih okvirjih so enote, ki se pojavijo večkrat. Pri telefonskem anketiranju se pojavijo podvojeni zapisi, če

- ima gospodinjstvo več telefonskih številk,
- imajo osebe poleg stalnega prebivališča tudi začasno prebivališče.

Če ima gospodinjstvo več telefonskih številk, ima večjo verjetnost za izbor v vzorec. Prav tako ima oseba, ki ima poleg stalnega tudi začasno prebivališče, večjo verjetnost za izbor v vzorec, če ima na obeh naslovih prijavljeno telefonsko številko. Idealno bi bilo, če bi lahko vnaprej identificirali enote ter izločili tiste, ki se ponavljajo, vendar je v praktičnih situacijah to zelo drago ali pa neizvedljivo. Druga možnost je, da sprejmemo vse podvojene zapise, nato pa uporabimo uteževanje ali pa jih preprosto ne obravnavamo, če jih je zelo malo.

3. Poseben problem pri telefonskem anketiranju predstavljajo neustrezne enote, kot so:

- nezasedene telefonske številke,
- napačne telefonske številke,
- poslovne in druge nerezidenčne številke,
- prazne telefonske številke, ker se je gospodinjstvo odselilo in ni odjavilo telefona,
- nedelujoče telefonske številke.

Največ neustreznih telefonskih številk dobimo pri vzorčenju s slučajnim generiranjem telefonskih številk. Njihovo število lahko zmanjšamo z vnaprejšnjo kontrolo aktivnosti številke. Če vzorec vsebuje neustrezno enoto, jo preprosto izpustimo, kar povzroči zmanjšanje velikosti vzorca, zato moramo že pri načrtovanju vzorca predvideti to možnost in izbrati večji vzorec.

Vzorčni okvir naj bi vseboval le ustrezne enote, vendar to še ne zagotavlja, da bomo v telefonski anketi uspeli pridobiti podatke od vseh oseb, ki jih želimo anketirati. Glavno težavo predstavlja vzpostavljanje kontaktov s klicanimi telefonskim številkami. V nadaljevanju jih bomo razdelili na uspešno in na neuspešno kontaktirane telefonske številke.

1. Po uspešno vzpostavljenem kontaktu s klicano telefonsko številko izberemo ustrezno osebo gospodinjstva. Izbrana oseba lahko sodeluje v anketi ali pa ne. Osebe, ki sodelujejo v anketi, imenujemo respondente, ki lahko odgovorijo na vsa vprašanja v anketi ali pa le na nekatera, če:

- anketiranje iz različnih razlogov prekinejo (npr. predolg vprašalnik),

- ne odgovorijo na manjše število vprašanj (npr. na občutljiva vprašanja).

Druga kategorija uspešno kontaktiranih oseb so osebe, ki so anketiranje v celoti zavrnile, ker:

- ne želijo sodelovati v anketi načelno ali zaradi vsebine vprašalnika,
- ne morejo odgovarjati zaradi bolezni ali zaradi nerazumevanja jezika,
- nimajo časa odgovarjati.

Ker je količina pridobljenih podatkov pomembna za raziskavo, se uporabljajo različni načini za preprečevanje ali zmanjševanje zgoraj opisanih neodgovorov. Če anketiranec ne želi sodelovati v anketi ali jo želi predčasno prekiniti, je naloga anketarja, da poskuša prepričati anketiranca k odgovarjanju. Pri tem lahko poudarja pomembnost raziskave, širšo družbeno korist ter zagotovi anonimnost in zaupnost podatkov. V nakaterih raziskavah so anketirance nagradili za sodelovanje z različnimi manjšimi nagradami. Kadar je prvi anketar neuspešen, lahko ponovno poskusi opraviti anketo drugi, bolj specializiran anketar. Za uspešnost ankete je dobro, če so na začetku bolj preprosta vprašanja, da anketiranec razgovora ne prekine predčasno. Kadar oseba nima časa odgovarjati, se anketar poskuša dogovoriti za drug termin. Pogosto se zgodi, da iskane osebe ni doma in se je oglasila druga oseba. V takem primeru se anketar poskuša dogovoriti za termin, ko bo iskana oseba doma.

2. Neuspešno kontaktirane telefonske številke predstavljajo pri telefonskih anketah velik problem. Najpogostejši razlogi so:

- zvonjenje v prazno, ko nihče ne dvigne telefonske slušalke, ker nikogar ni doma,
- okvarjen telefonski aparat,
- odložena telefonska slušalka,
- trenutno izključen telefonski aparat zaradi daljše odsotnosti (dopust), zaradi zaščite pred udarom strele ali zaradi ponavljajočih se vsiljivih klicev,
- zasedena telefonska številka, ker ravno ta trenutek nekdo govori po telefonu ali pa imajo priključen internet,
- vključena telefonska tajnica, ker nikogar ni doma,
- vključen faks, oglasi se značilen signal.

Poleg tega so poskusi kontaktiranja neuspešni tudi, če pokličemo neustrezne enote, ki so bile že opisane. Vse neuspešno kontaktirane telefonske številke, razen neustreznih, je potrebno ponovno poklicati in poskušati opraviti anketo, pri čemer se postavlja vprašanje, kdaj ponovno poklicati, da bi bilo število neuspešnih poskusov kontaktiranja čim manjše, saj ti poskusi pomenijo porabo časa in denarja. V ta namen je potrebno oblikovati strategijo, s pomočjo katere bi optimalno razporedili telefonske klice tako, da bi bila stopnja kontaktiranja čim višja. Ravno na tem področju je bilo v zadnjih desetletjih opravljenih veliko študij, v katerih so raziskovalci uporabili različne metode in pristope, vendar je problem še vedno povsem odprt.

2.4.1 Pregled rezultatov dosedanjih raziskav na področju razporejanja telefonskih klicev

V nadaljevanju se bomo omejili le na telefonsko anketiranje, čeprav se nekatere opisane težave pojavljajo tudi pri drugih načinih anketiranja, predvsem pri osebnem.

Če v zasnovi telefonskega anketiranja ni predvidena strategija za razporejanje klicev, je odločitev, kdaj prvič poklicati telefonsko številko in kdaj ponovno poklicati neuspešno kontaktirano številko, prepuščena anketarjem samim. Ti poskušajo izbrati ustrezen termin za prvi oziroma ponovni klic na slepo ali na podlagi svojih izkušenj. Ker anketarji ne uspejo upoštevati vseh dejavnikov, ki pomembno vplivajo na uspešnost kontaktiranja, se pojavlja veliko število neuspešno kontaktiranih številk.

Biemer in Lyberg [1] sta v svojem delu povzela rezultate raziskave Swires-Henneseyja in Drakea [26], ki sta pokazala, da v praksi anketarji ponovijo klice največkrat med tednom, potem pa nadaljujejo čez vikend, če so bili med tednom neuspešni, kar se ni izkazalo za uspešno strategijo. Uspešne strategije temeljijo na dejstvu, da je potrebno klicanje ponoviti takrat, ko so klicane osebe najverjetneje dosegljive.

Veliko raziskav se je osredotočilo na oblikovanje strategije na podlagi terminov klicev. Tako sta Gulati in Malcom [12] pokazala, da je uspešnost kontaktiranja odvisna od več dejavnikov, predvsem pa je odločujoč termin klica. Pri izbiri termina prvega ali ponovnega klica nastopi težava, saj je ravno takrat, ko je na voljo največ anketarjev, doma najmanj ljudi in je verjetnost uspešnega kontaktiranja najmanjša.

Biemer in Lyberg [1] se v svojem delu sklicujeta na Kulka in Weeksa [19], ki sta pri oblikovanju strategije treh ponovljenih klicev, če prej ni bilo uspeha, upoštevala pogojne verjetnosti glede na termine in izide predhodnih klicev, in ugotovila, da so najboljše kombinacije terminov klicev naslednje:

- delovni dan zvečer, nedelja, nedelja,
- nedelja, delovni dan zvečer, delovni dan zvečer,
- nedelja, delovni dan zvečer, delovni dan zjutraj.

Kot slabe kombinacije pa so se izkazale naslednje:

- delovni dan popoldne, delovni dan popoldne, delovni dan popoldne,
- delovni dan popoldne, delovni dan zjutraj, delovni dan zjutraj.

Anketarjem bi se opisani slabi kombinaciji morda zdeli primerni za uporabo, zato je smiselno izvesti študije in simulacije, s katerimi izločimo na videz dobre rešitve. Avtorja predlagata, da v primeru, ko ni dovolj časa ali možnosti za izdelavo optimalne strategije, anketarji opravijo čim več klicev ob delovnih dneh zvečer ali čez vikend.

Gulati in Malcom [12] sta predstavila problematiko pri razporejanju telefonskih klicev marketinške agencije, ki terja svoje stranke zaradi neplačanih obveznosti. Avtorja sta predstavila primerjavo treh metod, vsakokrat pa sta privzela tri možne izide:

- uspešno kontaktiran klic, ko se je klicani oglasil na telefon pri prvem poskusu,
- neuspešno kontaktiran klic, ko se je na telefon oglasila druga oseba, klicani pa ni bil dosegljiv,
- nihče se ni oglasil ali pa je se je oglasila avtomatska telefonska tajnica.

Metode, ki so bile uporabljene pri simulaciji, so:

- Hevristična metoda, ki temelji na izkušnjah menedžmenta in je zelo enostavna za uporabo. Klice, ki jih je želela agencija opraviti določen dan, so razporedili v ranžirno vrsto glede na količino denarja, ki jo stranka dolguje agenciji.
- Paketno optimiranje, pri katerem so naredili optimalni seznam klicev na začetku vsakega novega delovnega dne, pri čemer sta avtorja privzela 16-urni delovnik anketarjev. Metoda temelji na linearnem programiranju.
- Dinamično optimiranje, pri katerem so naredili reoptimizacijo seznama potrebnih klicev na začetku vsake naslednje delovne ure anketarjev, in prav tako temelji na linearnem programiranju.

Rezultati simulacije so pokazali, da sta bili paketna in dinamična metoda veliko bolj učinkoviti kot hevristična metoda, pri kateri je bilo potrebno opraviti veliko več poskusov klicev, med njimi pa je bilo malo uspešno kontaktiranih.

Največ raziskav in največ uporabnih rezultatov na področju optimalnega razporejanja telefonskih klicev, kar sem jih uspela pregledati, sta podali S. Lynne Stokes in Betsy S. Greenberg v delih [25] in [9]. Podrobno sta predstavili rezultate najpomembnejših raziskav do leta 1990:

- Falthzik [7], Weber in Burt [30] ter Weeks in drugi [31] so se ukvarjali z vprašanjem, kdaj poklicati prvič, da bo verjetnost uspešnega kontaktiranja največja.
- Groves in Kahn [10] sta pokazala, da verjetnost za uspešno kontaktiranje pada z naraščajočim številom ponovljenih klicev.
- Weeks in drugi [32] so razširili raziskave na vpliv termina prvega in drugega klica na izid drugega klica ter s tem pokazali, da je termin klica dobra napovedna spremenljivka za uspešnost kontaktiranja in zaključili, da je optimalno, če se drugi klic opravi čez teden zvečer ali čez vikend. Slabost te strategije je, kot so ugotovili že avtorji, da ne upošteva kapacitet anketarjev.
- Warde [29] se je ukvarjal z vprašanjem, kako dolgo počakati, preden ponovno poklicati, če se ni nihče oglasil, in kako dolgo počakati, če je bila telefonska številka zasedena.

V [25] sta podrobno predstavili različne dejavnike, ki vplivajo na uspešnost kontaktiranja, ter jih uporabili pri ocenjevanju verjetnosti za uspešno kontaktiranje z logistično regresijo. Za pomembne napovedne spremenljivke so se izkazale spremenljivke: število predhodnih klicev, čas klica, čas od zadnjega klica ter izid zadnjega klica.

V [9] sta pokazali, da lahko problem razporejanja telefonskih klicev opišemo z markovskim odločitvenim procesom (MOP). Vsako stanje v procesu vključuje podatke o terminih in izidih v predhodnih poskusih kontaktiranja in preostali čas do konca ankete. Odločitev, ki jo v procesu sprejememo, je izbor termina za ponovni poskus klica, ki je bil predhodno neuspešno kontaktiran. Privzeli sta, da se vsakokrat, ko se klic konča z intervjujem ali pa se izteče čas anketiranja, proces začne znova. Cilj optimizacije je minimizacija pričakovanega števila potrebnih telefonskih klicev za kontaktiranje v telefonski anketi z RDD vzorčenjem. Izkazalo se je, da je enakovredno maksimizirati delež opravljenih intervjujev na klic. Privzeli sta, da anketiranje poteka v omejenem času, in poiskali ravnovesno porazdelitev MOP, ki podaja razporeditev klicev, z linearnim programiranjem.

Osnovna izhodišča in ideje za oblikovanje matematičnega modela za optimalno razporejanje telefonskih klicev v pričujočem delu so povzeta po Kvedru in Vehovarju [20], ki bodo podrobneje predstavljene v nadaljevanju. Naj povem vnaprej, da je strategija podobna strategiji, ki sta jo uporabili S. Lynne Stokes in Betsy S. Greenberg v [9], vendar je privzetih nekaj drugačnih predpostavk.

3. OPERACIJSKE RAZISKAVE

Strategija razporejanja telefonskih klicev temelji na operacijskih raziskavah, zato so v tem poglavju najprej predstavljene operacijske raziskave kot veda, predstavljena je klasifikacija procesov, ki jih lahko obravnavamo z operacijskimi raziskavami, podrobno je opisan markovski odločitveni proces, omenjene so pomembne zgodovinske prelomnice v razvoju operacijskih raziskav, na koncu pa so predstavljeni še koraki operacijskega raziskovanja, ki bodo uporabljeni v nalogi.

3.1 Operacijske raziskave kot veda

Operacijske raziskave se ukvarjajo z oblikovanjem teoretičnih oziroma matematičnih modelov, s katerimi je mogoče opisati in predstaviti realne probleme na različnih področjih, in z iskanjem njihovih optimalnih (najboljših) rešitev. Zaradi svoje kvantitativne narave so se izkazale kot nepogrešljivo orodje pri razreševanju optimizacijskih problemov v industriji, transportu, medicini, družboslovju, vojski, najpogosteje pa srečamo njihovo uporabo pri poslovnem odločanju. Zaradi kompleksnosti in prepletenosti realnih problemov sodelujejo pri oblikovanju njihovih matematičnih modelov strokovnjaki različnih področij, najpogosteje matematiki, ekonomisti, statistiki, računalničarji, kar uvršča operacijske raziskave med interdisciplinarne vede. Tako sta npr. statistika in operacijske raziskave kot vedi zelo povezani. Statistične metode se uporabljajo za zbiranje podatkov in ocenjevanje parametrov modelov operacijskih raziskav, operacijske raziskave pa rešujejo optimizacijske probleme statistike. Pogosto je med njima težko postaviti ločnico.

Metode operacijskih raziskav temeljijo na matematičnih znanjih, predvsem na algebri, analizi, verjetnostnem računu in statistiki. V preteklih letih je bilo zaradi potreb na različnih področjih, predvsem pri poslovnem odločanju, oblikovanih veliko metod, ki so se izkazale za zelo učinkovite, vendar zaradi neprestanega razvoja gospodarstva in drugih področij vedno znova naletimo na probleme, za katere modeli še niso bili oblikovani, kar predstavlja nove izzive strokovnjakom. Operacijske raziskave so tako veda, ki se še danes razvija, in je po drugi svetovni vojni doživela največji razmah. Širša uporaba zmogljivih računalnikov in programske opreme je omogočila in olajšala reševanje velikih sistemov enačb in neenačb ter izvajanje različnih simulacij procesov, v katerih nastopajo slučajni vplivi, kar je operacijske raziskave približalo uporabnikom na vseh nivojih.

Kljub številnim raziskavam in literaturi se operacijske raziskave v praksi še vedno preveč redko uporabljajo, ker ljudje zaradi nepoznavanja metod ne zaupajo njihovim rezultatom, čeprav se s problemi optimizacije nevede srečujemo tudi v vsakdanjem življenju. Preprost primer je jutranje planiranje dnevnih obveznosti. Najprej v mislih sestavimo seznam vseh obveznosti, nato pa se na podlagi njihovih prioritet odločimo, v kakšnem vrstnem redu jih bomo opravili. Čez dan se lahko zgodi nepričakovan dogodek, ki poruši zjutraj sestavljen plan, zato moramo obveznosti, ki jih še nismo uspeli realizirati, ponovno optimalno razporediti.

Celotno poglavje je povzeto po literaturi [4], [6], [8], [13], [14], [21], [34], [35].

3.2 Klasifikacija procesov

Procese, katerih optimalno rešitev iščemo, lahko klasificiramo po različnih kriterijih. Grobo bi jih lahko razdelili v dve skupini, in sicer glede na

- časovno odvisnost: statične in dinamične,
- stopnjo opredeljenosti: deterministične in stohastične.

3.2.1 Statični in dinamični procesi

Statični procesi se ne spreminjajo s časom. Pogosto jih obravanavamo kot procese, ki se zgodijo v določenem trenutku oziroma v enem koraku. Njihove optimalne rešitve lahko iščemo na različne načine. Najbolj znane so tehnike matematičnega programiranja, s katerimi rešujemo probleme, ki jih lahko zapišemo kot vezane ekstreme, pri katerih iščemo ekstrem (minimum ali maksimum) t.i. ciljne funkcije neodvisnih odločitvenih spremenljivk, ki zadoščajo še dodatnemu sistemu omejitvenih enačb ali neenačb. Vezane ekstreme rešujemo z metodami infinitizimalnega računa, najpogosteje uporabljena pa je Lagrangeova metoda multiplikatorjev. Glede na lastnosti ciljne funkcije, sistema omejitvenih enačb in neenačb ter odločitvenih spremenljivk ločimo tri skupine matematičnega programiranja:

- Linearno programiranje, ki je ena najpopularnejših metod operacijskih raziskav. Ciljna funkcija je linearna funkcija zveznih odločitvenih spremenljivk in prav tako sistem omejitvenih enačb in neenačb. Podrobneje bo linearno programiranje predstavljeno v naslednjem poglavju.
- Celoštevilsko linearno programiranje, pri katerem lahko odločitvene spremenljivke zavzamejo le celoštevilske vrednosti.
- Nelinearno programiranje, ki ga uporabljamo takrat, ko se izkaže, da ciljna funkcija ali sistem omejitvenih enačb in neenačb niso linearne funkcije odločitvenih spremenljivk.

Dinamični procesi se spreminjajo s časom, ki je lahko zvezna ali diskretna spremenljivka. Če je čas diskretna spremenljivka, obravnavamo dinamični proces kot večfazni proces, pri katerem moramo na začetku vsake faze postaviti določeno odločitev, ki vpliva na odločitve v nadaljnjih fazah. Rešitev dinamičnega procesa je zaporedje odločitev, ki daje, glede na izbrani kriterij, optimalne rezultate. Optimalno rešitev lahko iščemo retrogradno ali progresivno.

3.2.2 Deterministični in stohastični procesi

V determinističnih procesih, ki so lahko dinamični ali statični, je posledica natanko določena z odločitvijo, ki jo v procesu sprejmemo. Vsi podatki in odločitve so podani z gotovostjo, kar pomeni, da velja vzročno-posledična zveza: ob enakih podatkih dobimo vedno enake rezultate.

Stohastičen proces je dinamičen proces, v katerem nastopajo slučajni vplivi, ki jih lahko opišemo z družino slučajnih spremenljivk X_t, definiranih za vrednost parametra t iz množice parametrov T. Parametri so lahko različne količine, v nadaljevanju pa bomo privzeli, da je parameter t čas, ki je lahko diskreten ali zvezen.

Za stohastičen proces bomo definirali prostor stanj, ki je množica vseh možnih vrednosti, ki jih lahko zavzamejo slučajne spremenljivke X_t. Prostor stanj je diskreten, če vsebuje končno ali števno neskončno mnogo elementov. Glede na čas in prostor stanj ločimo procese v diskretnem ali zveznem času z diskretnim ali zveznim prostorom stanj.

V naprej bomo privzeli, da je zaporedje $X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots$, stohastičen proces v diskretnem času s končnim diskretnim prostorom stanj $\{1, 2, 3, \ldots, M\}$. Ker je čas diskreten, bomo vsako vrednost parametra t imenovali korak procesa.

Naj bo $p_j^{(t)}$ porazdelitev slučajne spremenljivke X_t v koraku t. Potem je

$$p_j^{(t)} = P(X_t = j)$$

Poleg verjetnostne porazdelitve $p_j^{(t)}$ bomo vpeljali še pogojno verjetnost

$$P(X_t = j | X_l = i, X_m = k, \ldots)$$

ki pove verjetnost, da je v času t zasedeno stanje j, če je bilo v času l zasedeno stanje i, v času m stanje k, $\ldots$.

Med stohastičnimi procesi je pomemben markovski stohastični proces, za katerega velja markovska lastnost, da je verjetnost, da bo v trenutnem koraku zasedeno določeno stanje, odvisna le od stanja v predhodnem koraku in ne od stanj pred njim. Tako velja pogojna vejetnost

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i, X_{t-2} = k, \ldots) = P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}$$

Drugače povedano, markovski proces nima spomina.

V stohastičnih procesih lahko na vsakem koraku, preden proces preide iz začetnega stanja koraka v končno stanje koraka, sprejmemo določeno odločitev, ki vpliva na končno stanje koraka, in nam prinese določeno korist. Te procese imenujemo stohastične odločitvene procese, ki jih na vsakem koraku določajo štirje podatki, in sicer:

- prostor stanj,
- množica odločitev, ki jih lahko sprejmemo v vsakem stanju,
- prehodna porazdelitev za končna stanja koraka, ki je pogojna glede na začetno stanje koraka in glede na sprejeto odločitev,
- pričakovane koristi po vsaki odločitvi iz množice možnih in dopustnih odločitev.

V nadaljevanju se bomo omejili na markovske odločitvene procese (MOP), v katerih velja markovska lastnost. Na kratko lahko MOP opišemo v nekaj točkah:

1. Na začetku vsakega koraka se MOP nahaja v enem od stanj i iz končnega prostora stanj $\{0, 1, 2, \ldots, M\}$.

2. Za vsako stanje i iz prostora stanj poznamo končno množico odločitev $\{1, 2, \ldots, K\}$, pri čemer ni vsaka odločitev ustrezna za vsako stanje.

3. Naj bo $d_i = k$ odločitev k, ki smo jo naredili za stanje i. Pri vsaki odločitvi nastopi korist (strošek ali dobiček) c_{ik}.

4. Predpostavimo, da smo v stanju i in da smo izbrali odločitev $d_i = k$ iz množice vseh možnih odločitev v stanju i. Vsaka odločitev povzroči, da se iz stanja i premaknemo v stanje j, ki je eno od množnih stanj v naslednjem koraku. Prehodi med stanji niso določeni z gotovostjo, ampak jih lahko le napovemo s prehodnimi verjetnostmi.

   Naj bo $p_{ij}(k)$ prehodna verjetnost za prehod iz stanja i v stanje j, ko smo izbrali odločitev k. Prehodna verjetnost $p_{ij}(k)$ je, po markovski lastnosti, pogojna verjetnost glede na stanje, v katerem se je proces nahajal na začetku trenutnega koraka, in glede na odločitev, ki smo jo v trenutnem koraku sprejeli, in ne od stanj in od odločitev v predhodnih korakih:

$$p_{ij}(k) = P(X_t = j | X_{t-1} = i, d_i = k)$$

   Prehodne verjetnosti $p_{ij}(k)$ lahko določimo na osnovi izkušenj, podatkov iz preteklosti, jih ocenimo z opazovanjem ali pa jih pridobimo na podlagi ekspertnih mnenj, pridobljenih na podlagi vzorcev in metod, pri tem pa se velikokrat uporabljajo različne statistične metode.

5. Zaporedje odločitev vseh korakov določa strategijo za markovski odločitveni proces.

6. Med vsemi strategijami iščemo optimalno strategijo MOP glede na določeno korist, ki je lahko minimalni strošek ali maksimalni dobiček procesa.

Optimalno strategijo MOP lahko poiščemo na različne načine, med njimi tudi z linearnim programiranjem.

3.3 Zgodovinske prelomnice v razvoju operacijskih raziskav

Operacijske raziskave so mlado področje, saj so se začeli znanstveniki, predvsem matematiki, resno ukvarjati z njimi šele v 20. stoletju, čeprav je na njihov razvoj vplivala že industrijska revolucija, ki je povzročila, da proizvodni procesi niso bilo več enostavni, sama specializacija dela pa je zahtevala učinkovito organizacijo. Pravi razvoj operacijskih raziskav se je začel med drugo svetovno vojno zaradi potreb vojske, ko so ameriški in britanski vojaški strokovnjaki zaprosili znanstvenike za pomoč pri optimizaciji vojaških strateških problemov, predvsem pri transportnih, alokacijskih in taktičnih problemih. Po drugi svetovni vojni se je uporaba operacijskih raziskav razširila tudi na druga področja, ki so bila že predhodno omenjena, ker je s tehnološkim napredkom namesto vprašanja, kako narediti, postalo bolj pomembno vprašanje, kako narediti čim ceneje in čim hitreje, za kar je bilo potrebno oblikovati veliko različnih metod. Ime 'operacijske raziskave' pa se je ohranilo iz druge svetovne vojne, ker so jih uporabljali predvsem za namene vojaških 'operacij' (Hillier in Lieberman [13]).

Povzemimo nekaj pomembnejših zgodovinskih prelomnic v razvoju operacijskih raziskav:

1895: F. W. Taylor je proučeval, s kako veliko lopato bi moral delati delavec, da bi bil njegov učinek v predpisanem času največji (Čizman [4]).

1905 - 1918: A. Einstein in W. Smoluchowsky sta opazovala Brownovo gibanje, W. Shottky šum v elektronkah in A. K. Erlang telefonski promet. Modeli za omenjena opazovanja sodijo med stohastične procese (Hudoklin Božič [14]).

1931: A. N. Kolmogorov je izdelal matematično teorijo stohastičnih procesov (Hudoklin Božič [14]).

1936: D. Koenig je postavil osnove teorije grafov, ki so postali osnova številnim metodam, predvsem mrežnemu planiranju (Dobrenić [6]).

1939: Ruski matematik L. V. Kantorovič je objavil prve formulacije in primere uporabe linearnega programiranja v organizaciji in planiranju proizvodnje (Grasselli in Vadnal [8]).

1941: Ameriški matematik F. L. Hitchcock je objavil študijo o transportnih problemih, ki jih lahko rešujemo z linearnim programiranjem (Grasselli in Vadnal [8]).

1947: G. B. Dantzig je prvi objavil splošno algebraično metodo za reševanje linearnih programov, znano pod imenom metoda simpleksov (Grasselli in Vadnal [8]).

1949: Prva konferenca o uporabi linearnega programiranja v Chicagu (Dobrenić [6]).

1952: Izdelan je bil prvi računalniški program za reševanje linearnih programov z metodo simpleksov (Grasselli in Vadnal [8]).

V 80-tih letih se je razširila uporaba osebnih računalnikov, zato so postali številni programski paketi za reševanje problemov operacijskih raziskav dostopni širšim množicam (Hillier in Lieberman [13]).

3.4 Osnovni koraki pri operacijskem raziskovanju

Osnovna dejavnost operacijskih raziskav je modeliranje, s katerim realni problem ali proces prikažemo z matematičnim modelom. Ker je realni proces ponavadi zelo kompleksen, moramo pri oblikovanju modela privzeti ustrezne predpostavke, da sam proces poenostavimo, vendar le do tolikšne mere, da je model še vedno dobra slika procesa, sicer je model slab, njegove rešitve pa ne morejo biti uporabne. Da bi se izognili napakam v modelih, je priporočljivo upoštevati pet osnovnih korakov (prirejeno po Hillier in Lieberman [13] ter Winston [34]):

1. **Definiranje problema**
   V prvem koraku je potrebno natančno proučiti dani problem, kar zahteva sodelovanje naročnika (npr. vodstvo, uprava, direktor podjetja), tistega, ki bo skupaj z vodstvom postavljal končne odločitve, in analitika, ki bo reševal problem. Upoštevati morajo predvsem naslednje zahteve:

   - določitev ustreznih ciljev,
   - določitev omejitev, ki jih je potrebno upoštevati (časovne, stroškovne),
   - določitev kriterija za izbor najboljše rešitve med vsemi možnimi rešitvami,
   - povezave med področjem, s katerega je obravnavani problem, in ostalimi področji, ki lahko vplivajo na dani problem.

   Opisani prvi korak je pri reševanju problemov zelo pomemben, saj je "*težko dajati prave odgovore na napačna vprašanja*" (Hillier in Lieberman [13]). Posebno pozornost je potrebno posvetiti tudi zbiranju potrebnih podatkov, saj ponavadi niso na voljo na samem začetku, ker jih ni še nihče zbiral, ali pa so že zbrani podatki neustrezni ali nepopolni.

2. **Formuliranje matematičnega modela**
   Ko je definiran problem in vse omejitve, ki jih je potrebno upoštevati, oblikujemo matematični model, ki je le idealiziran realni problem. V matematičnem modelu moramo opredeliti:

   - odločitvene spremenljivke (npr. $x_1, x_2, \ldots, x_n$), katerih vrednosti iščemo,
   - ustrezen kriterij za izbor optimalne rešitve med vsemi možnimi rešitvami, ki je podan z ustrezno matematično funkcijo odločitvenih spremenljivk (npr. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Tako funkcijo imenujemo v matematiki funkcional, pogosto pa v praksi srečamo tudi sinonime namenska ali ciljna ali kriterijska funkcija.

- omejitve in parametre problema, ki so podani v obliki sistema enačb in (ali) neenačb.

V matematičnem jeziku povedano, poiskati je potrebno tiste vrednosti odločitvenih spremenljivk, ki ustrezajo danim omejitvenim enačbam in (ali) neenačbam, za katere ima ciljna funkcija ekstremno vrednost (minimum ali maksimum). Opisani postopek imenujemo optimizacija, kar je glavna naloga operacijskih raziskav.

3. **Iskanje rešitve**
Rešitev matematičnega modela poiščemo z ustreznim algoritmom. Danes je znanih že zelo veliko algoritmov, ki jih lahko uporabimo, če ugotovimo, da ustrezajo modelu. Ob novih problemih pa se pojavi potreba po razvoju novega algoritma, kar predstavlja za analitike poseben izziv. Ker je matematični model le idealizirana predstavitev realnega problema, je tudi rešitev matematičnega modela le idealizirana in ni zagotovila, da je to prava rešitev problema, na kar vpliva veliko dejavnikov, med drugimi tudi kakovost uporabljenih podatkov, zato sodi k operacijskemu raziskovanju tudi postoptimalna analiza, v kateri raziščemo, kako bi se spremenila optimalna rešitev, če bi uporabili drugačne predpostavke o parametrih modela.

4. **Testiranje modela in njegova priprava za uporabo**
Razvoj matematičnega modela oziroma algoritma je dolgotrajen proces, ki zahteva veliko preverjanj, da lahko zagotovimo njegovo učinkovito in pravilno delovanje. Posebno pozornost je potrebno posvetiti odkrivanju napak in pomanjkljivosti ter njihovemu sprotnemu odpravljanju. Postopek testiranja in izboljševanja modela imenujemo testiranje veljavnosti modela oziroma algoritma, pri čemer je pomembno, da:

- izdelan algoritem pregleda oseba, ki ni sodelovala pri njegovem razvoju, da lahko neodvisno pregleda njegovo pravilnost in učinkovitost,
- pregledamo, ali so vsi matematični izrazi usklajeni z enotami,
- pregledamo, kako vplivajo spremembe parametrov na spremembe optimalne rešitve,
- naredimo retrospektiven test, s katerim na podlagi že znanih podatkov in rezultatov iz preteklosti opravimo analizo teh podatkov z novo oblikovanim modelom in rezultate primerjamo z znanimi rezultati. Ob tem lahko naletimo na velika odstopanja med dejanskimi rezultati in rezultati modela, zaradi česar je potrebno model znova pregledati.

Preden gre model v uporabo, je potrebno izdelati dokumentacijo o testiranju veljavnosti modela, s katero dosežemo pri uporabnikih večje zaupanje v model, nadaljnjim raziskovalcem pa je s tem omogočeno nadaljnje delo ali nadgradnja modela. V dokumentacijo morajo biti vključeni tudi rezultati postoptimalne analize. Model ali algoritem se za praktično uporabo zapiše z ustreznim računalniškim programom, ki mora biti preprost za uporabo posamezniku ali širši javnosti.

5. **Implementacija modela in evalvacija priporočil**
   Uspešnost opravljenega dela je odvisna od sodelovanja analitikov in naročnika ter ostalih s področja menedžmenta. Ob natančno izdelanih navodilih in urjenju uporabnikov v uporabi izdelanega računalniškega programa je potrebno tudi vnaprej spremljati njegovo učinkovitost, preverjati, ali program dosega cilje, ki so bili začrtani na samem začetku raziskave, ter odkrivati morebitne pomanjkljivosti in jih sprotno popravljati. O računalniškem programu in celotni raziskavi mora biti po etičnih načelih znanstvenikov in raziskovalcev izdelana dokumentacija o uporabljeni metodologiji, ki omogoča ponovljivost celotnega procesa raziskovanja.

4. LINEARNO PROGRAMIRANJE

Optimalna razporeditev telefonskih klicev bo temeljila na linearnem programiranju, ki je posebna, zelo znana in pogosto uporabljana tehnika operacijskih raziskav, zato je v tem poglavju podrobno predstavljeno. Po klasifikaciji v prejšnjem poglavju ga lahko opišemo kot statičen determinističen proces.

Z linearnim programiranjem rešujemo različne probleme optimizacije v ekonomiji, kmetijstvu, zdravstvu, družboslovju, vojski, transportu, industriji. Najbolj znani so naslednji problemi:

- Proizvodni problem, pri katerem iščemo optimalni proizvodni plan določenih izdelkov, ki jih izdelujemo iz omejenih količin zalog surovin. Ob znanem čistem dobičku za posamezni izdelek želimo ustvariti maksimalni skupni dobiček pri prodaji izdelkov.

- Mešalni problem, ki obravnava zadostitev uporabnikovih potreb po določenih sestavinah, ki jih lahko najdemo zmešane v različnih mešanicah, za katere poznamo nabavne stroške. Izdelati želimo optimalni plan nabave posameznih mešanic, s katerim bi zadostili uporabnikove potrebe in dosegli minimalne skupne nabavne stroške.

- Transportni problem, ki obravnava razvoz določene količine enakih izdelkov od izvorov (proizvajalcev, ponudnikov) do ponorov (kupcev, povpraševalcev) po tem izdelku. Ob znanih prevoznih stroških za izdelek od posameznega izvora do posameznega ponora želimo doseči minimalne skupne prevozne stroške izdelkov, ob tem pa upoštevati omejitve razpoložljivih izdelkov posameznih izvorov in izpolniti vse zahteve ponorov po določeni količini izdelkov.

4.1 Predpostavke linearnega programa

Kadar želimo realni problem rešiti z linearnim programiranjem, je potrebno že pri sami formulaciji problema upoštevati predpostavke o odločitvenih spremenljivkah, ciljni funkciji ter omejitvenih enačbah in neenačbah, kot so (prirejeno po Hillier in Lieberman [13] ter Winston [34]):

1. **Linearnost**
   Ciljna funkcija in leva stran sistema omejitvenih enačb in neenačb morajo biti

linearne kombinacije odločitvenih spremenljivk, kar pomeni, da so prispevki posameznih odločitvenih spremenljivk k njihovim vrednostim premosorazmerni z vrednostmi odločitvenih spremenljivk.

2. **Zveznost**
   Vrednosti odločitvenih spremenljivk lahko zavzamejo katerokoli realno vrednost iz ustreznega intervala. Pogosto se zgodi, da mora biti vrednost odločitvene spremenljivke celo število, kot na primer pri proizvodnem problemu, kjer ne moremo izdelati npr. 3,2 izdelka. Problem lahko rešimo tako, da rezultat smiselno zaokrožimo ali pa uporabimo celoštevilsko linearno programiranje.

3. **Gotovost**
   Vsi koeficienti v ciljni funkciji, koeficienti v sistemu linearnih enačb in neenačb ter koeficienti na njihovi desni strani morajo biti določeni z gotovostjo, kar pomeni, da velja vzročno-posledična zveza. Če poznamo vrednosti odločitvenih spremenljivk, lahko izračunamo vrednost ciljne funkcije.

Če pri formuliranju problema predpostavk ne upoštevamo, rešitev linearnega programa ne zagotavlja optimalne rešitve realnega problema.

4.2 Splošna definicija linearnega programa

Linearni program lahko splošno definiramo kot problem, pri katerem je potrebno določiti vrednosti odločitvenih spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_s$, ki zadoščajo pogojem nenegativnosti:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_s \geq 0 \tag{4.1}$$

ter linearnim enačbam in (ali) neenačbam:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1s}x_s & \begin{smallmatrix}\leq\\=\\\geq\end{smallmatrix} & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2s}x_s & \begin{smallmatrix}\leq\\=\\\geq\end{smallmatrix} & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{ms}x_s & \begin{smallmatrix}\leq\\=\\\geq\end{smallmatrix} & b_m \end{array} \tag{4.2}$$

tako, da ima linearna ciljna funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = c_1x_1 + \cdots + c_sx_s \tag{4.3}$$

minimum ali maksimum. Pri tem sta m in s poljubni naravni števili, koeficienti a_{ij} in c_j poljubna realna števila in koeficienti b_i poljubna nenegativna števila (Grasselli in Vadnal [8]).

Linearni program lahko zapišemo tudi v matrični obliki. Označimo matriko koeficientov sistema omejitvenih enačb in neenačb 4.2 z matriko A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}$$

Koeficienti desne strani omejitvenih enačb in neenačb 4.2 naj bodo komponente vektorja $\underline{b}$, koeficienti ciljne funkcije 4.7 komponente vektorja $\underline{c}$ in neznane odločitvene spremenljivke 4.5 komponente vektorja $\underline{x}$:

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$$

Linearni program se v matrični obliki glasi: določiti moramo vrednosti odločitvenih spremenljivk vektorja $\underline{x}$, ki ustrezajo pogoju nenegativnosti

$$\underline{x} \geq 0,$$

sistemu omejitvenih enačb ali neenačb

$$A\underline{x} \lesseqgtr \underline{b}$$

tako, da bo imela ciljna funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = \underline{c}^T \underline{x}$$

ekstrem, minimum ali maksimum.

Z nenegativnimi odločitvenimi spremenljivkami opišemo odločitve, ki jih moramo sprejeti v danem problemu. Pri proizvodnem problemu predstavljajo število izdelkov, ki jih izdelamo, pri mešalnem problemu količino posameznih mešanic, ki jih nabavimo, pri transportnem problemu pa količino prevoženih izdelkov od posameznega proizvajalca do posameznega kupca.

Ciljna funkcija predstavlja pri proizvodnem problemu skupni dobiček pri prodaji izdelanih izdelkov, zato iščemo njen maksimum, pri mešalnem problemu skupne stroške pri nakupu mešanic, zato iščemo njen minimum, pri transportnem problemu pa skupne prevozne stroške pri prevozu vseh izdelkov, zato prav tako iščemo njen minimum.

Koeficienti desne strani omejitvenih neenačb in enačb podajajo omejitve linearnega programa. Pri proizvodnem problemu so omejitve zaloge surovin, iz katerih izdelujemo izdelke, pri mešalnem problemu pa zahteve po zadostitvi uporabnikovih potreb po posameznih sestavinah.

4.3 Reševanje linearnega programa

4.3.1 Lastnosti rešitev linearnega programa

Pri linearnem programiranju z besedo rešitev ne označujemo končne rešitve problema, ampak vsako urejeno s-terico vrednosti odločitvenih spremenljivk 4.5, ki ustreza sistemu omejitev 4.2. Ob tem lahko nastopi več možnosti (Grasselli in Vadnal [8]). Urejena s-terica vrednosti odločitvenih spremenljivk je:

- možna rešitev linearnega programa, če ustreza sistemu omejitvenih linearnih enačb in neenačb 4.2 in pogojem nenegativnosti,

- nemogoča rešitev linearnega programa, če ne ustreza kakšni od omejitvenih enačb oziroma neenačb 4.2 ali pogoju nenegativnosti,

- optimalna rešitev linearnega programa, če ustreza sistemu omejitvenih linearnih enačb in neenačb 4.2 in pogojem nenegativnosti tako, da ima ciljna funkcija za to s-terico ekstrem. V primeru iskanju maksimuma ciljne funkcije to pomeni, da ima ciljna funkcija v vseh drugih možnih rešitvah manjše vrednosti, v primeru iskanja minimuma pa, da ima v vseh dugih možnih rešitvah večje vrednosti.

Osnova za reševanje linearnih programov so konveksne množice in konveksne linearne kombinacije točk. Konveksna linearna kombinacija točk x_1 in x_2 je definirana z izrazom

$$(1-p)x_1 + px_2, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{4.4}$$

Množica konveksnih linearnih kombinacij dveh točk 4.4 predstavlja daljico, ki točki povezuje.

Konveksna množica je definirana kot množica, za katero velja, da z vsakima dvema njenima točkama leži v njej tudi vsaka njuna konveksna linearna kombinacija (Grasselli in Vadnal [8]). Točke konveksne množice lahko razdelimo v dve disjunktni množici točk:

- Prva vsebuje točke, ki jih lahko zapišemo kot konveksno linearno kombinacijo vsaj dveh drugih točk množice in jih imenujemo neekstremne točke konveksne množice.

- Druga množica vsebuje točke, ki jih ne moremo zapisati kot konveksno linearno kombinacijo vsaj dveh drugih točk množice in jih imenujemo ekstremne točke konveksne množice.

Množico možnih rešitev linearnega programa in konveksne množice povezuje nekaj izrekov, ki bodo navedeni brez dokazov (dokazi so v Grasselli in Vadnal [8]):

- Množica vseh možnih rešitev linearnega programa je konveksna.

- Med ekstremnimi točkami neprazne in omejene konveksne množice možnih rešitev linearnega programa obstaja vsaj ena, v kateri ima ciljna funkcija ekstrem.

- Če ima ciljna funkcija ekstrem v več ekstremnih točkah konveksne množice možnih rešitev, potem ima ekstrem tudi v vseh točkah, ki so konveksne linearne kombinacije teh ekstremnih točk.

Če v linarnem programu nastopata le dve spremenljivki, npr. x_1 in x_2, predstavlja linearna neenačba $ax_1 + bx_2 \leq c$ v pravokotnem koordinatnem sistemu v ravnini polravnino. Ker množica možnih rešitev ustreza vsem omejitvenim neenačbam hkrati, je le-ta v bistvu presek polravnin, ki jih določajo neenačbe. Taka množica je konveksna množica in jo imenujemo konveksni poligon. Ekstremne točke konveksnega poligona so njegova oglišča. Podobno si lahko predstavljamo tudi v višjih dimenzijah, kjer množico možnih rešitev imenujemo konveksni polieder.

Glede na število optimalnih rešitev linearnega programa ločimo več možnosti. Linearni program:

- nima optimalne rešitve, če je množica možnih rešitev prazna (v primeru, da je sistem omejitvenih enačb protisloven) ali neomejena (v primeru iskanja maksimuma ciljne funkcije, ker njene vrednosti rastejo čez vse meje);
- ima natanko eno optimalno rešitev, če je množica možnih rešitev neprazna in omejena konveksna množica;
- ima neskončno mnogo optimalnih rešitev, če ciljna funkcija doseže ekstrem v vsaj dveh ekstremnih točkah konveksnega poliedra, ker ima isto ekstremno vrednost tudi v vseh točkah, ki so konveksne linearne kombinacije teh ekstremnih točk.

Za reševanje linearnih programov obstaja več metod, najbolj znani pa sta grafična metoda in metoda simpleksov.

4.3.2 Reševanje linearnega problema z grafično metodo

Grafično metodo je mogoče uporabiti, kadar v linearnem programu nastopata le dve odločitveni spremenljivki, saj je ciljna funkcija v tem primeru premica, sistem linearnih enačb ali neenačb pa določa v ravnini konveksen poligon, ki predstavlja množico možnih rešitev. Ker lahko ciljna funkcija doseže ekstrem le v ogliščih konveksnega poligona, je osnovna ideja pri iskanju optimalne rešitve v preverjanju, v katerem od oglišč doseže ciljna funkcija ekstrem (minimum ali maksimum).

Najprej narišemo množico možnih rešitev in premico, ki predstavlja ciljno funkcijo, nato pa izberemo eno od oglišč za začetno rešitev in izračunamo vrednost ciljne funkcije v tem oglišču. Nato izberemo drugo oglišče in zopet izračunamo vrednost ciljne funkcije. V primeru iskanja maksimuma ciljne funkcije obdržimo tisto oglišče, v katerem ima ciljna funkcija večjo vrednost, v primeru iskanja minimuma pa oglišče, v katerem ima ciljna funkcija manjšo vrednost. Nato ponavljamo primerjanje vrednosti ciljne funkcije še za ostala oglišča.

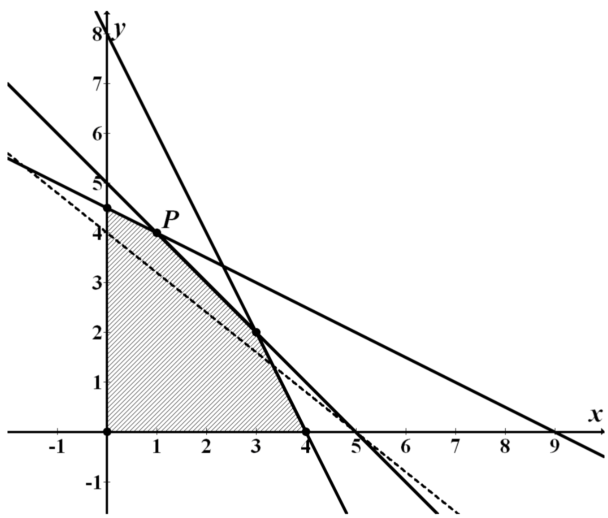
Linearni program ima v primeru iskanja maksimuma ciljne funkcije optimalno rešitev v oglišču, v katerem ima ciljna funkcija največjo vrednost glede na vrednosti v vseh ostalih ogliščih, v primeru iskanja minimuma pa v oglišču, v katerem ima ciljna funkcija najmanjšo vrednost glede na vrednosti v ostalih ogliščih.

Za ilustracijo si oglejmo primer, pri katerem je potrebno določiti vrednosti odločitvenih spremenljivk x in y, ki zadoščajo sistemu omejitvenih neenačb:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 3y & \leq & 15 \\ 4x & + & 2y & \leq & 16 \\ 2x & + & 4y & \leq & 18 \\ & & x & \geq & 0 \\ & & y & \geq & 0 \end{array}$$

tako, da bo imela ciljna funkcija $f(x, y) = 12x + 15y$ maksimum.

Sistem omejitvenih linearnih neenačb določa v ravnini konveksni poligon, ki je na sliki 4.1 prikazan s šrafiranim območjem, ciljna funkcija pa je črtkana premica. Ciljna funkcija lahko doseže maksimum le v ogliščih konveksnega poligona ali na zveznici dveh sosednih oglišč oziroma na njuni konveksni linearni sestavi. V danem primeru je največja vrednost ciljne funkcije v točki $P(1, 4)$, kar pomeni, da je optimalna rešitev linearnega programa $x = 1$ in $y = 4$, vrednost ciljne funkcije v tej točki pa je $f(1, 4) = 72$.



Slika 4.1: Primer grafičnega reševanja linearnega programa

4.3.3 Reševanje linearnega programa z metodo simpleksov

V prejšnji točki je bila predstavljena grafična metoda za reševanje linearnih programov, ki jo lahko uspešno uporabljamo, kadar nastopata v linearnem programu le dve odločitveni spremenljivki, vendar v praktičnih primerih pogosto nastopa več spremenljivk, zato potrebujemo splošnejšo metodo.

Leta 1947 je Dantzig razvil metodo simpleksov, ki se uporablja, kadar v linearnem programu nastopa več spremenljivk. Osnovna ideja simpleksne metode je podobna kot pri grafični metodi, le da simpleksna metoda zahteva zapis sistema omejitvenih linearnih neenačb in enačb v obliki kanoničnega sistema linearnih enačb, kar pomeni, da nastopa v vsaki enačbi natanko ena spremenljivka, ki ima v tej enačbi koeficient enak 1, v vseh ostalih enačbah pa koeficient 0. Poleg tega mora biti izpolnjena še dodatna zahteva, da so vse konstante na desni strani neenačb in enačb nenegativne. Če ni tako, pomnožimo neenačbo ali enačbo s številom -1. V nadaljevanju bo podana le osnovna ideja metode simpleksov, podrobnosti pa so v Grasselli in Vadnal [8].

Sistem linearnih neenačb in neenačb pretvorimo v kanonični sistem linearnih enačb v dveh korakih:

1. V prvem koraku uvedemo dopolnilne spremenljivke, s katerimi neenačbe preoblikujemo v enačbe, zato v tistih neenačbah, v katerih nastopa znak $\leq$, dopolnilno spremenljivko prištejemo, v neenačbah z znakom $\geq$ pa jo odštejemo, da izenačimo levo in desno stran neenačbe. Dopolnilne spremenljivke izpolnjujejo pogoj nenegativnosti.

2. V drugem koraku uvedemo umetne spremenljivke v tistih enačbah, v katerih ne nastopa spremenljivka, ki bi imela v tej enačbi koeficient 1, v drugih enačbah pa 0. Umetne spremenljivke je potrebno torej prišteti v enačbah, kjer smo dopolnilne spremenljivke odšteli, in v enačbah, kjer nismo uvajali dopolnilnih spremenljivk. Tudi umetne spremenljivke izpolnjujejo pogoj nenegativnosti.

Dodatne in umetne spremenljivke uvedemo tudi v ciljno funkcijo, vendar so koeficienti teh spremenljivk odvisni od tega, ali iščemo maksimum ali minimum ciljne funkcije:

1. Če iščemo maksimum ciljne funkcije, imajo dopolnilne in umetne spremenljivke v ciljni funkciji koeficiente enake 0.

2. Če iščemo minimum ciljne funkcije, imajo dopolnilne in umetne spremenljivke, ki imajo v sistemu omejitvenih enačb koeficient $+1$, v ciljni funkciji dovolj velik koeficient v primerjavi z ostalimi koeficienti v ciljni funkciji. Dopolnilne spremenljivke, ki imajo v sistemu omejitvenih enačb koeficient -1, imajo v ciljni funkciji koeficient enak 0.

Predpostavimo, da smo v sistem omejitvenih enačb in neenačb 4.2 uvedli dopolnilne in umetne spremenljivke tako, da vsebuje zdaj n spremenljivk in m enačb, kjer naj bo $n \geq m$. Prav tako naj bodo dopolnilne in umetne spremenljivke že uvedene v ciljno funkcijo. Glede na to, da vseh n spremenljivk izpolnjuje pogoj nenegativnosti, se preoblikovani linearni program glasi: iščemo vrednosti odločitvenih spremenljivk $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ki zadoščajo pogojem nenegativnosti:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{4.5}$$

in linearnim enačbam:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \tag{4.6}$$

tako, da ima ciljna funkcija

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_s) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \tag{4.7}$$

minimum ali maksimum.

Predpostavimo, da je rang matrike koeficientov leve strani sistema enačb 4.6 poln. Ker smo predpostavili, da je $n \geq m$, ima sistem neskončno mnogo rešitev. Za $n - m$ spremenljivk lahko njihove vrednosti poljubno izberemo. Te spremenljivke bomo imenovali nebazne spremenljivke, ostale spremenljivke, katerih vrednosti izračunamo iz sistema, pa bomo imenovali bazne spremenljivke. Različni izbori nebaznih spremenljivk in njihovih vrednosti dajejo različne vrednosti baznih spremenljivk, pri tem pa se lahko zgodi, da za spremenljivke ni izpolnjen pogoj nenegativnosti. Bazne rešitve, katerih komponente so bazne spremenljivke in ustrezajo pogoju nenegativnosti, bomo imenovali bazne možne rešitve.

Kot je bilo že povedano, je množica vseh baznih možnih rešitev konveksna množica oziroma konveksen polieder. Za vsako bazno možno rešitev obstaja natanko določena ekstremna točka konveksnega poliedra.

V nadaljevanju bomo potrebovali še definicijo pojma sosednih baznih možnih rešitev. Dve bazni možni rešitvi linearnega programa z m omejitvenimi enačbami sta sosedni, če se ujemata v vrednostih $m - 1$ baznih spremenljivk.

Potek reševanja linearnega programa lahko opišemo v štirih korakih:

1. Linearni program z uvedbo dopolnilnih in umetnih spremenljivk preoblikujemo v kanonično obliko.

2. Poiščemo začetno bazno možno rešitev tako, da $n - m$ spremenljivkam določimo vrednost 0, vrednosti ostalih m spremenljivk pa izračunamo iz sistema 4.6.

3. Preverimo, ali je trenutna bazna možna rešitev optimalna rešitev linearnega programa. V primeru iskanja maksimuma preverimo, ali ima ciljna funkcija v tej točki največjo vrednost glede na vrednosti v ostalih baznih možnih rešitvah, v primeru iskanja minimuma ciljne funkcije pa najmanjšo vrednost. Če trenutna bazna možna rešitev ni optimalna, poiščemo sosedno bazno možno rešitev.

4. Ponovimo korak 3, v katerem uporabimo sosedno bazno možno rešitev kot trenutno bazno možno rešitev.

Izmed n spremenljivk lahko $n - m$ nebaznih spremenljivk izberemo na

$$\binom{n}{n-m}$$

različnih načinov. Linearni program ima lahko največ $\binom{n}{n-m}$ baznih rešitev, če je med njimi nekaj nemogočih. Ker iščemo optimalno rešitev linearnega programa tako, da se premikamo od ene ekstremne točke konveksnega poliedra do druge, bo simpleksna metoda našla optimalno rešitev v končno mnogo korakih oziroma iteracijah.

Za reševanje linearnega programa z metodo simpleksov oblikujemo tabelo, v katero zapišemo vse vhodne podatke, nato pa s pomočjo matričnih transformacij poiščemo optimalno rešitev. Postopek je natančno opisan v Grasselli in Vadnal [8], na tem mestu pa se ne bi spuščali v podrobnosti.

4.4 Dualni linearni program

Vsakemu primarnemu linearnemu programu ustreza dualni linearni program, pri katerem iščemo vrednosti toliko nenegativnih odločitvenih spremenljivk, kot je v primarnem linearnem programu omejitvenih enačb in neenačb. Med primarnim in dualnim linearnim programom velja naslednja zveza:

- matrika koeficientov omejitvenih enačb in neenačb dualnega programa je enaka transponirani matriki koeficientov A primarnega programa;
- neenačaje v omejitvenih neenačbah primarnega linearnega programa obrnemo;
- koeficienti $\underline{c}$ ciljne funkcije primarnega programa postanejo omejitve v sistemu enačb in neenačb dualnega programa;
- koeficienti $\underline{b}$ desne strani sistema enačb in neenačb primarnega programa postanejo koeficienti ciljne funkcije dualnega programa;
- maksimum ciljne funkcije primarnega programa zamenjamo z minimumom (ali obratno).

Iz opisanega je razvidno, da je dualni linearni program od dualnega zopet nazaj primarni program. Vsebinski pomen dualnega linearnega programa je odvisen od problema, ki ga rešujemo s primarnim linearnim programom.

Pri proizvodnem problemu želimo s primarnim linearnim programom določiti optimalno število izdelkov, ki jih lahko izdelamo iz danih surovin z omejenimi zalogami tako, da bo skupni dobiček od prodaje izdelkov maksimalen. Lahko pa se odločimo, da bomo namesto izdelovanja in prodaje izdelkov odprodali surovine. V ta namen oblikujemo dualni linearni program, s katerim iščemo najmanjšo vrednost enote vsake surovine tako, da bo dobiček pri odprodaji surovin vsaj tolikšen kot pri optimalnem proizvodnem programu. Ob tem želimo seveda odprodati čim manj surovin, zato iščemo minimum ciljne funkcije dualnega linearnega programa.

4.5 Postoptimalna analiza linearnega programa

Pri oblikovanju linearnega programa za reševanje realnega problema je privzetih veliko predpostavk, predvsem glede vrednosti parametrov modela, zato sodi k operacijskemu raziskovanju tudi postoptimalna analiza optimalne rešitve linearnega programa, s katero želimo ugotoviti, kako bi spremembe parametrov modela ali modela samega vplivale na spremembo optimalne rešitve. Pri postoptimalni analizi linearnega programa lahko (prirejeno po Dobrenić [6]):

- spreminjamo koeficiente v sistemu omejitvenih enačb in neenačb ter koeficiente ciljne funkcije,
- dodajamo nove spremenljivke ter omejitvene enačbe in neenačbe,
- analiziramo vrednosti dopolnilnih, dodatnih in dualnih spremenljivk.

S spremembo vrednosti enega od koeficientov na desni strani omejitvenih enačb in neenačb (koeficient v vektorju $\underline{b}$) za eno ali več enot lahko ugotavljamo, za koliko bi se spremenile vrednosti odločitvenih spremenljivk v optimalni rešitvi. Za vsak koeficient je mogoče določiti interval, znotraj katerega se lahko nahajajo njegove vrednosti, da ostane optimalna rešitev nespremenjena, če se seveda ostali koeficienti ne spreminjajo. Prav tako bi lahko s spreminjanjem koeficientov v matriki A ugotovili, kako spremembe vplivajo na optimalno rešitev, vendar je zaradi iterativnega postopka te spremembe težko izraziti analitično. Tudi spreminjanje vrednosti koeficientov ciljne funkcije primarnega programa vplivajo na optimalno rešitev. V vseh opisanih primerih se lahko zgodi, da optimalna rešitev ostane nespremenjena, ali pa se spremeni tako, da katera od spremenljivk izpade iz optimalne rešitve in namesto nje nastopi katera druga spremenljivka, ki trenutno ni bila v optimalni rešitvi.

Če v linearni program uvedemo nove odločitvene spremenljivke, jih moramo uvesti tako v sistem omejitvenih enačb in neenačb kot v ciljno funkcijo. Če se izkaže, da ima nova spremenljivka možnost priti v optimalno rešitev, je potrebno ponovno preučiti obravnavani problem in na novo oblikovati model, ker nova odločitvena spremenljivka pomeni novo aktivnost v modelu. Dodajanje novih omejitvenih enačb in neenačb pomeni dodajanje novih omejitev, ki lahko prav tako spremenijo optimalno rešitev.

Pri postoptimalni analizi imajo poseben pomen dualne spremenljivke, zato se pogosto anlizirajo njihove vrednosti. Povedo, za koliko bi se spremenila vrednost ciljne funkcije, če bi spremenili vrednost enega od koeficientov ciljne funkcije dualnega programa za eno enoto, kar pomeni, da bi spremenili vrednost koeficienta na desni strani omejitvenih enačb in neenačb. Če je vrednost dualne spremenljivke enaka 0, potem sprememememba pripadajočega koeficienta ne bi vplivala na optimalno rešitev.

Npr. pri proizvodnem problemu samo povečevanje zaloge surovine, ki ji pripada dualna spremenljivka z vrednostjo 0, ne bi povečalo skupnega dobička, ker je število izdelkov, ki jih lahko izdelamo, omejeno z zalogami preostalih surovin. Če pa vrednost dualne spremenljivke ni enaka 0, lahko s povečanjem zaloge pripadajoče surovine naredimo več izdelkov, kar poveča skupni dobiček.

4.6 Klasičen transportni problem

Klasičen transportni problem kot poseben primer linearnega programiranja obravnava problem razvoza določene količine materiala (izdelkov, enot) od n izvorov (proizvajalcev, ponudnikov) do m ponorov (potrošnikov, naročnikov, trgovin, porabnikov). Ob znanih prevoznih stroških na enoto materiala (na izdelek) od posameznega izvora do posameznega ponora želimo doseči minimalne skupne prevozne stroške materiala, ob tem pa upoštevati omejitve razpoložljivega materiala posameznih izvorov in izpolniti vse zahteve ponorov po določeni količini materiala.

Označimo izvore z $A_1, A_2, \ldots, A_n$, omejene količine materiala, ki jih ponujajo,
pa z $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Skupna ponudba vseh izvorov je potem $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Označimo ponore z $B_1, B_2, \ldots, B_m$, njihove zahtevane količine materiala pa z $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Skupno povpraševanje vseh ponorov je potem $b = \sum_{j=1}^{m} b_j$.

Naj bodo $c_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$, prevozni stroški v d.e. na enoto prevoženega materiala od i-tega izvora do j-tega ponora, ki jih lahko predstavimo v tabeli:

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ \hline A_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ A_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & & & \vdots & \\ A_n & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{array} \tag{4.8}$$

Naj bo $x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$ količina materiala, ki ga prepeljemo od i-tega ponudnika do j-tega porabnika. V tabeli 4.9 so predstavljene omejene količine materiala izvorov (ponudba) in zahtevane količine materiala ponorov (naročila) ter neznane količine materiala x_{ij}.

$$\begin{array}{c|cccc|c} & B_1 & B_2 & \cdots & B_m & \mathit{ponudba} \\ \hline A_1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} & a_1 \\ A_2 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} & a_2 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ A_n & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} & a_n \\ \hline \mathit{naročila} & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & \end{array} \tag{4.9}$$

Transportni problem ima rešitev, če je problem uravnotežen, kar pomeni, da je ponudba enaka naročilom, torej

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j \tag{4.10}$$

Ob upoštevanju omejitev ponudbe posameznega izvora morajo biti v matriki 4.9 vsote nenegativnih odločitvenih spremenljivk po vrsticah enake pripadajočim omejitvam izvorov a_i, ob tem pa morajo biti izpolnjene tudi zahteve ponorov, zato morajo biti vsote spremenljivk po stolpcih enake zahtevanim količinam posameznih ponorov b_j. Omejitveni sistem enačb za transportni problem je:

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0,\ i = 1, \dots n,\ j = 1, \dots m \\ \sum_{j=1}^{m} x_{ij} &= a_i,\ i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= b_j,\ j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Pri razvozu želimo imeti čim manjše skupne prevozne stroške, zato iščemo minimum ciljne funkcije, ki jo dobimo tako, da vsako odločitveno spremenljivko x_{ij} pomnožimo z ustreznimi prevoznimi stroški c_{ij} na enoto prevožene količine materiala iz matrike 4.8. Ciljna funkcija je potem

$$f(x_{11}, \dots, x_{nm}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

V praksi se večkrat pojavijo problemi, pri katerih ponudba ni enaka naročilom, da problem torej ni uravnotežen. Nastopita lahko dve možnosti:

- Če je $\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$, je ponudba večja od naročil, zato uvedemo navidezen ponor, ki navidezno prevzame tisto količino materiala izvorov, ki presega naročila. Prevozni stroški od posameznega izvora do posameznega navideznega ponora so v tem primeru 0 d.e.

- Če je $\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j$, je ponudba manjša od naročil, zato uvedemo navidezen izvor, ki navidezno proizvede tisto količino materiala, ki presega ponudbo. Prevozni stroški od posameznega navideznega izvora do posameznega ponora so tudi v tem primeru 0 d.e.

Transportne probleme lahko rešimo na več načinov, in sicer z grafično metodo, če nastopata le dve odločitveni spremenljivki, z metodo simpleksov, z metodo stopalnikov (*angl. Stepping Stone Method*), z metodo severnozahodnega kota (*angl. The Northwest-Corner Rule*) in z metodo MODI (*angl. The Modified Distribution Method*) (Dobrenić [6]).

4.6.1 Dualni linearni program transportnega problema

Dualni linearni program za transportni problem oblikujemo podobno kot pri ostalih linearnih programih, le da lahko v tem primeru zavzamejo dualne spremenljivke tudi negativne vrednosti. Za vsako omejitveno enačbo uravnoteženega transportnega problema uvedemo po eno dualno spremenljivko. Označimo z $u_1, u_2, \dots, u_n$ dualne spremenljivke, ki pripadajo omejitvenim enačbam ponudbe, in z $v_1, v_2, \dots, v_m$ dualne spremenljivke, ki pripadajo omejitvenim enačbam naročil. Uvedbo dualnih spremenljivk najlažje prikažemo v tabeli:

$$
\begin{array}{r|cccc|cc}
 & B_1 & B_2 & \cdots & B_m & \textit{ponudba} & \textit{dualne spr.} \\
\hline
A_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & a_1 & u_1 \\
A_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & a_2 & u_2 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & \\
A_n & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & a_n & u_n \\
\hline
\textit{naročila} & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\
\textit{dualne spr.} & v_1 & v_2 & \cdots & v_m & &
\end{array}
\tag{4.11}
$$

Iščemo vrednosti dualnih spremenljivk, ki so lahko tudi negativne in ustrezajo sistemu enačb

$$u_i + v_j = c_{ij},\ \ i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

tako, da bo imela ciljna funkcija

$$f(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m) = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n + b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m$$

maksimum.

Dualne spremenljivke pri klasičnem transportnem problemu povedo, za koliko bi se spremenila vrednost ciljne funkcije (skupni prevozni stroški), če bi se omejitev enega izvora oziroma naročilo enega ponora spremenilo za eno enoto.

5. STRATEGIJA RAZPOREJANJA TELEFONSKIH KLICEV

V poglavju je oblikovan matematični model za razporejanje telefonskih klicev. Sam problem razporejanja je na začetku podrobno predstavljen in ker se izkaže, da je zelo kompleksen, je privzetih nekaj predpostavk, s katerimi ga nekoliko poenostavimo. Za oblikovani model je pokazano, da ustreza pogojem markovskega odločitvenega procesa, čigar optimalno rešitev, torej optimalno razporeditev klicev, poiščemo s transportnim problemom linearnega programiranja. Na koncu poglavja je analiza modela, ki zajema lastnosti modela, možnosti za njegovo razširitev ter možnosti za postoptimalno analizo. Osnovna ideja za oblikovanje modela je povzeta po Kvedru in Vehovarju [20].

5.1 Predstavitev problema in oblikovanje predpostavk

Telefonsko anketiranje, ki je bilo podrobno predstavljeno v poglavju 2, sodi zaradi številnih prednosti v primerjavi z drugimi načini anketiranja med najbolj razširjene načine anketiranja. Kljub mnogim prednostim se pri njegovi zasnovi in izvedbi pojavljajo različne težave, ki so bile opisane v poglavju 2. Med njimi je bil posebej izpostavljen problem pri vzpostavljanju kontaktov s klicanimi telefonskimi številkami.

Pri telefonskem anketiranju najprej poskušamo vzpostaviti kontakt z izbrano telefonsko številko. Vsak poskus vzpostavitve kontakta, ali krajše klic, se konča z določenim izidom (*angl. outcome*). Izid je lahko uspešno ali neuspešno kontaktiranje. Uspešno kontaktiran klic je vsak klic, pri katerem smo uspeli vzpostaviti kontakt z eno od oseb gospodinjstva. Pri tem je bila anketa izvedena v celoti ali delno ali pa je bila zavrnjena, če smo kontaktirali z osebo, ki smo jo želeli anketirati, ali anketa ni bila izvedena, če se je oglasila druga oseba. V obeh primerih se je nekdo oglasil na telefon. Neuspešno kontaktiran klic je tisti, pri katerem nismo uspeli govoriti z nobenim članom gospodinjstva.

Izidi neuspešno kontaktiranih klicev so bili opisani že v razdelku 2.4, vendar jih povzemimo še enkrat:

- zvonjenje v prazno, ko nihče ne dvigne telefonske slušalke, ker nikogar ni doma,
- okvarjen telefonski aparat,
- odložena telefonska slušalka,

- trenutno izključen telefonski aparat zaradi daljše odsotnosti (dopust), zaradi zaščite pred udarom strele ali zaradi ponavljajočih se vsiljivih klicev,
- zasedena telefonska številka, ker ravno ta trenutek nekdo govori po telefonu ali pa imajo priključen internet,
- vključena telefonska tajnica, ker nikogar ni doma,
- vključen fax, oglasi se značilen pisk.

Pri anketiranju je želja in cilj opraviti čim večje število anket, zato moramo vzpostaviti kontakt s čim večjim številom telefonskih številk. Najprej se moramo odločiti, kdaj bomo telefonsko številko poklicali prvič, nato pa v primeru, da je bil poskus kontaktiranja neuspešen, kdaj bomo klic ponovili, kar je tema pričujočega dela. Ker je, po izkušnjah sodeč, pri telefonskem anketiranju neuspešno kontaktiranih klicev veliko, potrebujemo strategijo, ki zagotavlja, da bo pri čim manjšem številu opravljenih klicev število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno oziroma da bo stopnja kontaktiranja maksimalna, kar bi pomenilo prihranek časa in zmanjšanje stroškov anketiranja.

Problem razporejanja telefonskih klicev je zaradi velikega števila dejavnikov, ki vplivajo na uspešnost kontaktiranja, zelo kompleksen, zato ga bomo z nekaj predpostavkami poenostavili, nato pa razmislili še o ostalih možnostih.

1. Privzemimo, da želimo anketirati n oseb, zato moramo poklicati n telefonskih številk. Klicanje lahko poteka vsak dan, lahko le na izbrane dneve, lahko le ob delovnih dneh ali pa ob delovnih dneh in čez vikend. Ne glede na odločitev med opisanimi možnostmi imenujmo vsak posamezen dan, ko opravljamo klice, korak. Pri tem bomo privzeli, da so v vzorcu le ustrezne enote, da so torej nedelujoče, poslovne in druge nerezidenčne številke že izločene.

Vsak posamezni dan oziroma korak lahko v nadaljevanju razdelimo na krajše časovne termine. Kličemo lahko npr. dopoldan, popoldan in zvečer ali pa vsaki dve uri, kar je seveda odvisno od delovnega časa oziroma razpoložljivosti anketarjev. Posamezne dele dneva, ko lahko opravljamo klice, bomo imenovali delovne izmene (*angl. shift*). Splošno bi lahko povzeli, da proces klicanja poteka v več korakih, vsak korak pa je razdeljen na delovne izmene.

Odločitev, kdaj bomo ponovno poklicali neuspešno kontaktirano telefonsko številko, je odvisna od izida klica. Če ob klicanju slišimo signal za zasedeno telefonsko številko, je to znak, da je nekdo doma in govori po telefonu ali pa ima vključen internet. V takem primeru je smiselno ponovno poklicati v isti izmeni, morda čez 10 minut. V primeru, da telefon zvoni v prazno, da se torej nihče ne oglasi, ali pa je vključena avtomatska tajnica, vemo, da nikogar ni doma, in ni smiselno ponovno poklicati v isti izmeni trenutnega koraka, ampak v naslednji izmeni istega koraka ali v katerem od naslednjih korakov. Ob tem pa se postavlja vprašanje, ali je v naslednjih korakih smiselno ponovno poklicati v isti izmeni, kot je bil neuspešen klic že opravljen, saj je klicani morda spet odsoten iz istega razloga. Ob tem imamo lahko na vsakem koraku na voljo vedno iste delovne izmene ali pa se izmene spreminjajo odvisno od razpoložljivosti anketarjev, kar pomeni, da lahko prvi dan kličemo npr. zjutraj in zvečer, naslednji dan le popoldne in zvečer.

Če bi poskušali upoštevati vse opisane možnosti, bi bil problem zelo kompleksen. Najprej se bomo lotili poenostavljenega problema, zato v nadaljevanju privzemimo, da so na vsakem koraku na voljo iste delovne izmene ter da klicanje poteka tako, da:

- v prvem koraku pokličemo vse telefonske številke iz vzorca, vsako natanko enkrat v natanko eni od razpoložljivih izmen,
- v vsakem naslednjem koraku ponovno pokličemo tiste telefonske številke, s katerimi v predhodnem koraku nismo uspeli vzpostaviti kontakta, in sicer zopet vsako telefonsko številko natanko enkrat v natanko eni od razpoložljivih izmen.

2. Iz dosedanjih raziskav, ki so bile opisane v poglavju 2, je razbrati, da na uspešnost kontaktiranja v trenutnem koraku vpliva več dejavnikov, kot so število predhodnih klicev, termini in izidi predhodnih klicev, čas od zadnjega klica. Na podlagi le-teh lahko napovemo, kakšen bo izid klica na koncu trenutnega koraka. V nadaljevanju bomo privzeli, da sta pomembna le dva dejavnika, in sicer:

- izmene, v katerih so bili opravljeni predhodni klici,
- izidi predhodnih klicev.

Tako bomo na koncu vsakega koraka za vsak klic zabeležili izmeno, v kateri je bil klic opravljen, in izid klica. Dobljeno zaporedje izmen in izidov bomo v nadaljevanju imenovali zgodovina klica. Vse možne zgodovine klicev na koncu trenutnega koraka predstavljajo izhodna stanja tega koraka.

3. Izidov posameznih klicev ne moremo z gotovostjo napovedati vnaprej. Vse možne izide posameznega klica na trenutnem koraku lahko le pričakujemo z verjetnostmi, ki jih bomo imenovali prehodne verjetnosti in so pogojne glede na izmeno, v kateri bo klic opravljen v trenutnem koraku, in glede na zgodovino klica na koncu predhodnega koraka. Prehodne verjetnosti tvorijo za klice z enako zgodovino, ki so v trenutnem koraku opravljeni v isti izmeni, verjetnostno porazdelitev.

V poglavju 2 so bili predstavljeni rezultati raziskav, ki so pokazali, da lahko prehodne verjetnosti na podlagi ustreznih podatkov o klicih in njihovih izidih v podobnih anketah ocenimo vnaprej. Najpogosteje je bila uporabljena logistična regresija. V samo ocenjevanje prehodnih verjetnosti se ne bomo spuščali, zato bomo privzeli, da smo jih že ocenili in da so njihove ocene nepristranske.

4. Privzeli bomo še, da je število klicev, ki jih lahko opravimo znotraj posamezne delovne izmene na vsakem koraku, določeno vnaprej, kar predstavlja dodatne omejitve pri oblikovanju optimalne strategije. Skupno število klicev po izmenah, ki jih lahko opravimo, je namreč lahko:

    - manjše od števila klicev, ki jih moramo opraviti,
    - večje od števila klicev, ki jih moramo opraviti,
    - enako številu klicev, ki jih moramo opraviti.

    V prvem primeru ne uspemo opraviti vseh potrebnih klicev, zato bi morali preostale klice opraviti v naslednjem koraku. V drugem primeru bi uspeli opraviti vse potrebne klice, vendar bi bili anketarji neizkoriščeni, v tretjem primeru pa bi uspeli opraviti vse potrebne klice in anketarji bi bili izkoriščeni v celoti.

    Zaradi poenostavitve problema bomo privzeli tretjo možnost, da je torej na vsakem koraku število klicev, ki jih moramo opraviti, enako skupnemu številu klicev po izmenah, ki jih lahko opravimo.

Na kratko lahko celoten problem optimalnega razporejanja telefonskih klicev povzamemo v štirih točkah:

- Klicanje poteka v zaporednih korakih. V vsakem koraku pokličemo vse telefonske številke, ki so bile v predhodnem koraku neuspešno kontaktirane, in sicer vsako številko natanko enkrat v natanko eni od izmen. Izjema je le prvi korak, v katerem pokličemo vse telefonske številke, s katerimi moramo v anketi vzpostaviti kontakt, zopet vsako številko natanko enkrat v natanko eni od izmen.

- Za vsako telefonsko številko zabeležimo izmeno, v kateri smo jo poklicali, in izid klica. Zaporedje izmen in izidov klica na koncu vsakega koraka smo imenovali zgodovina klica.

- Izide posameznih klicev lahko pričakujemo vnaprej s prehodnimi verjetnostmi, ki so pogojne glede na izmeno, v kateri bo klic opravljen v trenutnem koraku, in glede na zgodovino klica na koncu predhodnega koraka. Izjema je le prvi korak, ker klici še nimajo zgodovine in so prehodne verjetnosti pogojne le na izmeno, v kateri bo klic opravljen.

- Klice optimalno razporedimo po izmenah tako, da bo pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev čim večje. Za vsako izmeno je število klicev, ki jih lahko opravimo, omejeno. Privzeli smo, da je skupno število klicev po izmenah, ki jih lahko opravimo, enako številu klicev, ki jih moramo opraviti.

Opisani problem optimizacije je aktualen, če anketar kliče in razporeja klice sam. Njegova odločitev, kdaj bo prvič poklical telefonsko številko in kdaj bo ponovno poklical neuspešno kontaktirano telefonsko številko, da bo verjetnost vzpostavitve kontakta največja, je odvisna od njegovih izkušenj. Z ustrezno oblikovano strategijo razporejanja klicev lahko dosežemo večjo stopnjo kontaktiranja, pri tem pa lahko pričakujemo, da bo anketar porabil veliko manj časa za klicanje in opravil veliko manj klicev, ker je število neuspešno kontaktiranih klicev manjše, kar vpliva na zmanjšanje stroškov ankete. Prav tako je optimizacija primerna v primeru RDD vzorčenja, ko računalnik sam izbira in kliče telefonske številke.

Čeprav lahko sama optimizacija razporejanja klicev zmanjša stroške izvajanja ankete, pa lahko ocenjevanje prehodnih verjetnosti iz podatkov podobnih anket te stroške bistveno poveča. Oceniti je potrebno namreč zelo veliko število prehodnih verjetnosti. Število stanj se na koncu vsakega koraka zelo poveča, zato je potrebno za vsako stanje oziroma zgodovino klica in za vsako izmeno naslednjega koraka oceniti prehodne verjetnosti za vsak možen izid. Oblikovanje strategije za optimalno razporejanje klicev je torej smislno le, če se stopnja kontaktiranja bistveno poveča. Če je njeno povečanje le za nekaj odstotnih točk, je nesmiselno vlagati toliko denarja v ocenjevanje prehodnih verjetnosti. Nekoliko cenejše je, če prehodne verjetnosti ocenimo npr. z logistično regresijo, saj potrebujemo le dobre ocene napovednih dejavnikov, ocene prehodnih verjetnosti pa nato izračunamo.

Če se izkaže, da je oblikovanje optimalne strategije predrago, lahko prihranimo veliko anketarjevega časa s sistemom vnaprejšnje izbire telefonske številke, ki se v praksi pogosto uporablja in je bil že opisan v poglavju 2. Omogoča hitro vzpostavljanje kontaktov s klicanimi telefonskimi številkami, ker klic poveže z anketarjem šele takrat, ko je vzpostavljen kontakt z gospodinjstvom. Anketarjev delovni čas je tako dobro izkoriščen, ker ne čaka na zvezo in ne izgublja časa s telefonskimi števikami, s katerimi ni vzpostavljen kontakt. Vendar mora biti tudi pri sistemu vnaprejšnje izbire izdelana strategija za ponovno klicanje telefonskih številk, s katerimi računalnik ni uspel vzpostaviti kontakta. Tako bi lahko strategijo optimalnega razporejanja telefonskih klicev, ki bo oblikovana, uporabili tudi pri tem načinu, vendar še vedno obstaja problem stroškov ocenjevanja prehodnih verjetnosti.

Problem neodgovorov zaradi neuspešno kontaktiranih telefonskih številk (in zaradi drugih razlogov) lahko rešujemo tudi z uteževanjem. Mera za koristnost uteževanja je srednja kvadratna napaka (*angl. Mean Squared Error*, MSE), ki je enaka vsoti kvadrata pristranskosti ocene parametra (*angl. bias*) in variance. Pristranskost ocene je razlika med oceno parametra in pravo vrednostjo parametra populacije. Veliko število neodgovorov lahko dodatno poveča pristranskost, z uteževanjem pa lahko jo zmanjšamo, vendar se pri tem poveča vzorčna varianca. Če se MSE po uteževanju zmanjša, je uteževanje učinkovito, saj je zmanjšanje pristranskosti precejšnje v primerjavi s povečanjem variance. V nadaljevanju se ne bomo spuščali v podrobnejšo analizo MSE.

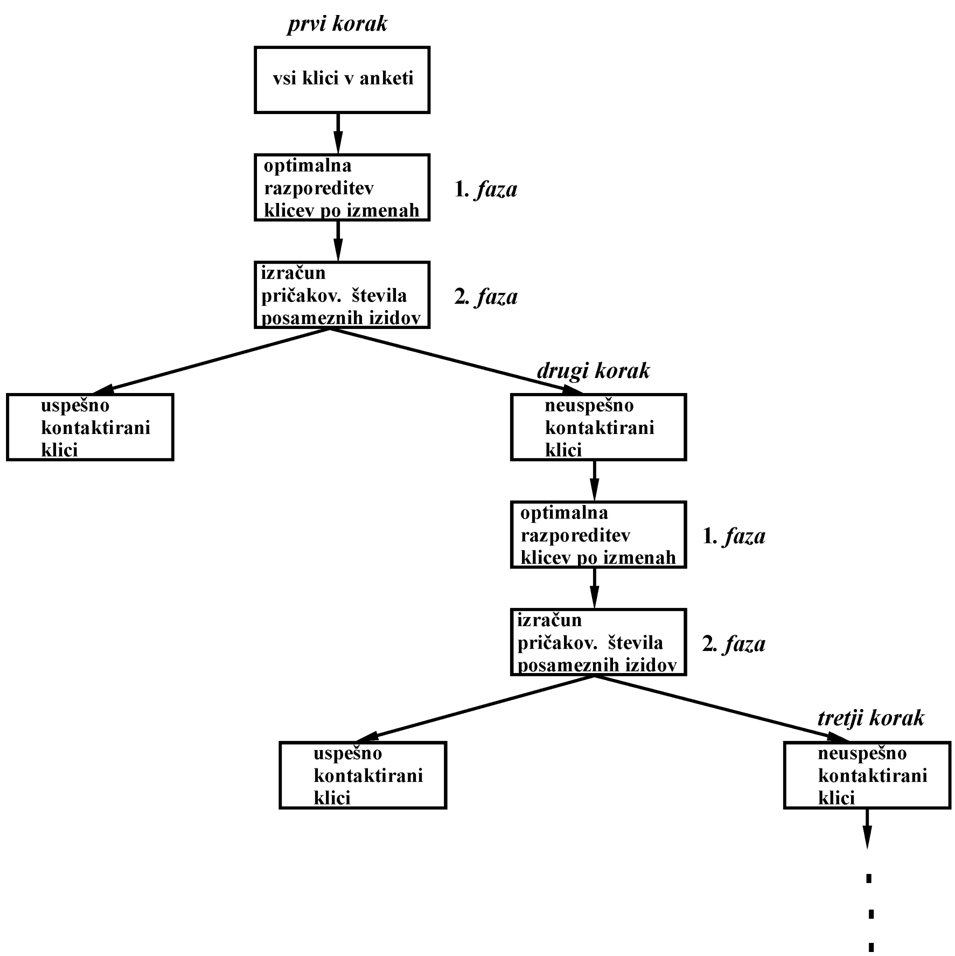
5.2 Postavitev matematičnega modela

Pri predstavitivi problema razporejanja telefonskih številk je bilo privzetih veliko predpostavk, ki jih bomo upoštevali pri oblikovanju matematičnega modela za njihovo optimalno razporejanje po delovnih izmenah tako, da bo pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno. Privzeto je bilo, da poteka optimizacija zaporedno po korakih. V nadaljevanju bo pokazano, da problem optimizacije sestavljata na vsakem koraku dve fazi:

- V prvi fazi s pomočjo operacijskega algoritma optimalno razporedimo klice znotraj delovnih izmen tako, da dosežemo glede na vnaprej ocenjene prehodne (pogojne) verjetnosti za uspešno kontaktirane klice maksimalno število uspešno kontaktiranih klicev.

- V drugi fazi s pomočjo prehodnih verjetnosti izračunamo pričakovano število posameznih izidov vseh klicev, ki so bili v prvi fazi optimalno razporejeni po izmenah.

Celoten proces optimizacije v zaporednih korakih lahko vidimo na spodnji sliki 5.1.



Slika 5.1: Grafični prikaz razporejanja telefonskih klicev po korakih

Zaporedno številko koraka bomo označili s k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, in privzeli, da je na vsakem koraku znotraj delovnega dne na voljo d različnih izmen, pri vsakem klicu pa je v vsaki izmeni mogočih p različnih izidov.

- Izmeno, v kateri je bil opravljen klic na k-tem koraku, bomo označili z ${}^{k}h$. Zaloga vrednosti za ${}^{k}h$ je množica vseh razpoložljivih izmen, ki ima moč d. (Npr. za $d = 2$ vsebuje dve izmeni: npr. popoldan in zvečer.)
- Izid klica na k-tem koraku bomo označili z ${}^{k}o$. Zaloga vrednosti za ${}^{k}o$ je množica vseh možnih izidov, ki ima moč p. (Npr. za $p = 3$ imamo tri možne izide: npr. uspešno kontaktiran klic, zasedena telefonska številka in zvonjenje v prazno.)

Kot smo že definirali, tvori zaporedje izmen in izidov na koncu k-tega koraka zgodovino klica. Vsaka možna zgodovina predstavlja eno od možnih izhodnih stanj koraka. Ker ima lahko več klicev enako zgodovino, je frekvenca teh klicev frekvenca izhodnega stanja. Frekvence vseh možnih izhodnih stanj bomo zapisali v vektor, ki ga bomo imenovali izhodni vektor stanj. Izhodni vektor stanj ima torej toliko komponent, kot je možnih zgodovin na koncu k-tega koraka. V nadaljevanju bomo zgodovino, ki pripada i-ti komponenti izhodnega vektorja stanj k-tega koraka, označili s ${}^{k}\pi_i$

$${}^{k}\pi_i = {}^{1}h_i\ {}^{1}o_i\ {}^{2}h_i\ {}^{2}o_i \ldots\ {}^{k}h_i\ {}^{k}o_i$$

Pri tem je ${}^{1}h_i,\ {}^{2}h_i,\ \ldots\ {}^{k}h_i$ zaporedje izmen, v katerih je bila opazovana telefonska številka poklicana v prvih k korakih, in ${}^{1}o_i,\ {}^{2}o_i,\ \ldots\ {}^{k}o_i$ zaporedje izidov teh klicev. Indeks i označuje, da zaporedje izmen in izidov pripada i-ti komponenti izhodnega vektorja stanj.

Ker želimo v prvem koraku razporediti n klicev, ki še nimajo zgodovine, je vhodni vektor stanj prvega koraka enodimenzionalen: ${}^{0}S_1 = [n]$. V nadaljevanju želimo na vsakem koraku vse klice z enako zgodovino razporediti znotraj razpoložljivih d izmen, pri vsakem klicu pa je znotraj vsake izmene mogočih p različnih izidov. Ker je vhodni vektor stanj v prvem koraku enodimenzionalen, je vhodni vektor stanj k-tega koraka, ki je enak izhodnemu vektorju stanj $k-1$ koraka, dimenzije $(d \cdot p)^{k-1}$. Če zapišemo pri vsaki komponenti vektorja še zgodovino klica na koncu $k-1$ koraka ${}^{k-1}\pi_i,\ i = 1, 2, \ldots, (d \cdot p)^{k-1}$, je 5.1 vhodni vektor stanj k-tega koraka, kjer je $s_i,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ (d \cdot p)^{k-1}$, frekvenca klicev z enako zgodovino na koncu $k - 1$ koraka.

$${}^{k-1}S_{(d\cdot p)^{k-1}} = \begin{array}{l} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ {}^{k-1}\pi_{(d\cdot p)^{k-1}} \end{array} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{(d\cdot p)^{k-1}} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

Opisani problem je zelo kompleksen, ker dimenzije vektorjev stanj hitro naraščajo. Že pri npr. dveh različnih izmenah ($d = 2$) in pri npr. treh različnih izidih ($p = 3$) je dimenzija vhodnega vektorja stanj drugega koraka $(2 \cdot 3)^{(2-1)} = 6$, tretjega koraka $(2 \cdot 3)^{(3-1)} = 36$, četrtega koraka že $(2 \cdot 3)^{(4-1)} = 218$.

Problem postane nekoliko manj kompleksen, če v vsakem nadaljnjem koraku izpustimo uspešno kontaktirane klice, ker želimo v nadaljevanju vzpostaviti kontakt le z neuspešno kontaktiranimi klici, kar pomeni, da upoštevamo namesto p le $p-1$ različnih izidov. Vhodna vektorja stanj z uspešno kontaktiranimi klici in brez njih bomo ločevali med seboj po njunih dimenzijah. Označimo z ${}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}}$ popravljen vhodni vektor stanj za k-ti korak.

$$
{}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} = \begin{array}{l} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ {}^{k-1}\pi_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \end{array} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \end{bmatrix} \tag{5.2}
$$

Dimenzije vhodnih vektorjev stanj si zdaj v primeru $d=2$ in $p=3$ sledijo takole: v drugem koraku $(2\cdot 2)^{(2-1)}=4$, v tretjem $(2\cdot 2)^{(3-1)}=16$, v četrtem $(2\cdot 2)^{(4-1)}=64$.

Dodatna omejitev v modelu je število razpoložljivih klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah na posameznem koraku. Število teh klicev bomo na vsakem koraku zapisali v vektor, ki ga bomo imenovali vektor razpoložljivih klicev. Za k-ti korak ga bomo označili s ${}^{k}c$. Ker je na vsakem koraku d različnih izmen, je vektor ${}^{k}c$ d-dimenzionalen.

$$
{}^{k}c = (c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_d)
$$

Vsota komponent tega vektorja je enaka skupnemu številu klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah v trenutnem koraku, in kot smo privzeli, je enaka številu vseh klicev, ki jih moramo na tem koraku opraviti.

Prva faza optimizacije

V prvem koraku razporejanja klicev v prvi fazi optimizacije optimalno razporedimo po izmenah vse klice iz vzorca, v vsakem nadaljnjem koraku pa neuspešno kontaktirane klice predhodnega koraka po razpoložljivih delovnih izmenah tako, da bo glede na prehodne verjetnosti za nastop uspešno kontaktiranega klica število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno.

Klice z enako zgodovino razporedimo po izmenah tako, da njihovo frekvenco v vhodnem vektorju stanj pomnožimo z ustreznimi deleži klicev, ki jih bomo opravili po izmenah. Označimo z

$$
o_{ij},\ i=1,2,\ldots,(d\cdot(p-1))^{k-1},\ j=1,2,\ldots,d
$$

neznani delež klicev i-te komponente vhodnega vektorja stanj, ki bodo razporejeni v j-to izmeno. Ti deleži klicev po izmenah predstavljajo odločitvene spremenljivke, katerih vrednosti moramo določiti. Odločitvene spremenljivke so kot deleži nenegativne. Če je vrednost spremenljivke enaka 0, potem v pripadajoči izmeni ne bomo opravili nobenega klica. Ker vsakokrat razporedimo po izmenah vse klice z enako zgodovino, tvorijo pripadajoče odločitvene spremenljivke verjetnostno porazdelitev. Odločitvene spremenljivke lahko za vse klice z enako zgodovino zapišemo v vrstice matrike, ki jo bomo imenovali operacijska matrika. Ker tvorijo odločitvene spremenljivke po vrsticah verjetnostno porazdelitev, je vsota vsake vrstice te matrike enaka 1.

Označimo operacijsko matriko za k-ti korak z ${}^{k}O$. Ker je vhodni vektor stanj k-tega koraka dimnezije $(d \cdot (p-1))^{k-1}$, mogočih pa je d izmen, je operacijska matrika dimenzije $(d \cdot (p-1))^{k-1} \times d$ in jo lahko zapišemo kot

$$
{}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} {}^{k}h_1 & \cdots & {}^{k}h_d \end{array} \\ \begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} o_{11} & \cdots & o_{1d} \\ o_{21} & \cdots & o_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ o_{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}1} & \cdots & o_{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}d} \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.3}
$$

Ker želimo neuspešno kontaktirane klice $k-1$ koraka optimalno razporediti znotraj delovnih izmen k-tega koraka, moramo vsako komponento vhodnega vektorja stanj 5.2 pomnožiti z ustrezno vrstico operacijske matrike 5.3. To dosežemo tako, da vhodni vektor stanj najprej diagonaliziramo, kar pomeni, da postanejo komponente vektorja diagonalni elementi diagonalne matrike, nato pa dobljeno diagonalno matriko pomnožimo z operacijsko matriko. Ker so v operacijski matriki vsote po vrsticah enake 1, so vsote po vrsticah produkta diagonaliziranega vhodnega vektorja stanj z operacijsko matriko enake frekvencam vhodnega vektorja stanj, vsote po stolpcih pa številu opravljenih klicev po izmenah. Če označimo diagonalizacijo z D in diagonalno matriko stanj z ${}^{k-1}_{D}S$, lahko opisani postopek predstavimo z naslednjim matematičnim modelom

$$
{}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \quad \longrightarrow^{D} \quad {}^{k-1}_{D}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \quad \longrightarrow \quad {}^{k-1}_{D}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \cdot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} \tag{5.4}
$$

Za krajši opis zgornjega postopka definirajmo novo matrično operacijo

$$
\underline{a} \odot B = diag(\underline{a})B
$$

kjer je $diag(\underline{a})$ diagonalizacija vektorja $\underline{a}$ dimenzije n in B matrika dimenzije $n \times m$. Operacija $\odot$ povzroči, da se vsi elementi i-te vrstice matrike B pomnožijo z i-to komponento vektorja $\underline{a}$. Sama operacija je podrobneje predstavljena v prilogi A.

Matriko

$$
{}^{k-1}_{D}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \cdot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}
$$

iz modela 5.4 lahko zdaj zapišemo kot

$$
{}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot^{k} O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}
$$

Če jo zapišemo še eksplicitno, je

$$
{}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} {}^{k}h_1 & \cdots & {}^{k}h_d \end{array} \\ \begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} s_1 o_{11} & \cdots & s_1 o_{1d} \\ s_2 o_{21} & \cdots & s_2 o_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.5}
$$

Druga faza optimizacije
Predpostavimo, da smo v prvi fazi že določili operacijsko matriko, ki jo sicer iščemo, in da smo klice z enako zgodovino že optimalno razporedili znotraj razpoložljivih izmen.

V drugi fazi bomo na podlagi vnaprej ocenjenih prehodnih (pogojnih) verjetnosti za posamezne izide izračunali pričakovano število posameznih izidov za vse klice z enako zgodovino, da bomo dobili izhodni vektor stanj k-tega koraka. Prehodne verjetnosti, pripadajoče klicem z enako zgodovino, ki bodo v trenutnem koraku opravljeni v isti izmeni, tvorijo verjetnostno porazdelitev in jih po vrsticah zapišemo v matriko, ki jo bomo imenovali prehodna matrika. Vsota vsake vrstice v prehodni matriki je enaka 1.

Ker je vhodni vektor stanj na k-tem koraku dimnezije $(d \cdot (p-1))^{k-1}$, vsaki komponenti vektorja pa pripada d delovnih izmen, ima prehodna matrika $d \cdot (d \cdot (p-1))^{k-1}$ vrstic in p stolpcev, ker je mogočih p izidov. Prehodno matriko, z vsotami po vrsticah enakih 1, na k-tem koraku označimo s ${}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p}$.

Vsako vrstico prehodne matrike 5.6 bomo opremili še z zapisom zgodovine in pripadajoče izmene. Tako bomo pri i-ti vrstici zapisali ${}^{k-1}\pi_i\, {}^{k}h_i$.

$$
{}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} o_{1k} & \cdots & o_{dk} \end{array} \\ \begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1\, {}^{k}h_1 \\ {}^{k-1}\pi_2\, {}^{k}h_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1p} \\ p_{21} & \cdots & p_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{d(d\cdot(p-1))^{(k-1)}1} & \cdots & p_{d(d\cdot(p-1))^{(k-1)}p} \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.6}
$$

Komponente izhodnega vektorja stanj k-tega koraka izračunamo tako, da vsak element matrike 5.5 iz modela 5.4, katere elementi so enaki številu klicev z enako zgodovino v posamezni izmeni, pomnožimo z ustreznimi verjetnostmi prehodne matrike. Matriko 5.5 najprej vektoriziramo po stolpcih, dobljeni vektor, ki ga označimo z ${}^{k'}S_{d(d\cdot(p-1))^{k-1}}$, pa zopet diagonaliziramo in ga pomnožimo s prehodno matriko. Tako dobljena matrika podaja pričakovano število izidov klicev z enako zgodovino. Z njeno vektorizacijo dobimo izhodni vektor stanj k-tega koraka, ki je hkrati vhodni vektor stanj za naslednji korak.

Model 5.4 lahko zdaj dopolnimo

$$
\begin{array}{llll}
 & {}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \quad \longrightarrow^{D} \quad {}^{k-1}_{D}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} & & \longrightarrow \\
\longrightarrow & {}^{k-1}_{D}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} & & \longrightarrow^{V} \\
\longrightarrow^{V} & {}^{k'}S_{d(d\cdot(p-1))^{k-1}} \quad \longrightarrow^{D} \quad {}^{k'}_{D}S_{d(d\cdot(p-1))^{k-1}} & & \longrightarrow \\
\longrightarrow & {}^{k'}_{D}S_{d(d\cdot(p-1))^{k-1}} \cdot {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p} & & \longrightarrow^{V} \\
\longrightarrow^{V} & {}^{k}S_{(d\cdot(p-1))^{k}} & &
\end{array}
\tag{5.7}
$$

Za krajši zapis zgornjega postopka definirajmo še eno novo matrično operacijo

$$A \boxdot B = diag(vec(A))B$$

kjer je $diag(vec(A))$ matrika, ki jo dobimo tako, da matriko A najprej vektoriziramo po stolpcih, nato dobljeni vektor diagonaliziramo. Če je matrika A dimenzije $n \times m$, je diagonalna matrika $diag(vec(A))$ dimenzije $(nm) \times (nm)$, zato mora biti matrika B dimenzije $nm \times p$. Operacija $\boxdot$ povzroči, da se vrstice matrike B po vrsti pomnožijo z elementi po stolpcih matrike A. Operacija je podrobneje opisana v prilogi B.

Celoten problem optimizacije razporejanja telefonskih klicev na k-tem koraku lahko opišemo krajše z modelom

$$({}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}) \boxdot {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p} \longrightarrow^{V} \quad {}^{k}S_{(d\cdot(p-1))^{k}} \tag{5.8}$$

Za boljše razumevanje izpišimo matriko

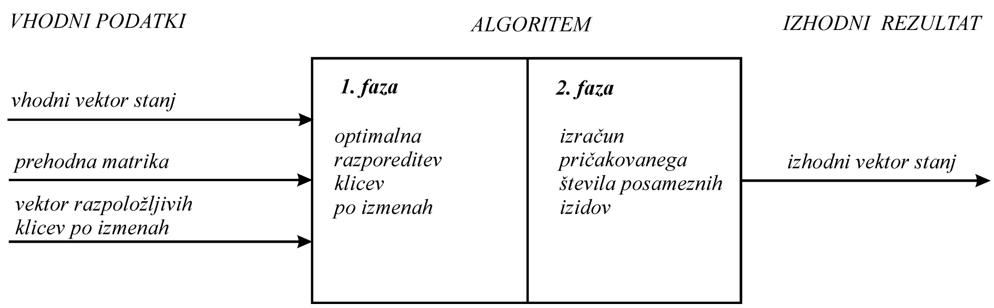
$$({}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}) \boxdot {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p}$$

še eksplicitno

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} {}^{k}o_1 & \cdots & {}^{k}o_d \end{array} \\
\begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \; {}^{k}h_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \; {}^{k}h_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} &
\begin{bmatrix} s_1o_{11}p_{11} & \cdots & s_1o_{11}p_{1p} \\ s_2o_{21}p_{21} & \cdots & s_2o_{21}p_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{5.9}
$$

Če predpostavimo, da so verjetnosti za nastop uspešno kontaktiranih klicev podane v prvem stolpcu prehodne matrike 5.6, potem želimo doseči čim večjo vsoto prvega stolpca matrike 5.17.

Na sliki 5.2 je grafično prikazan celoten proces optimalnega razporejanja telefonskih klicev na enem koraku, za katerega moramo na začetku poznati vhodni vektor stanj, prehodno matriko in vektor razpoložljivih klicev po izmenah. V prvi fazi klice, ki jih moramo opraviti, optimalno razporedimo po izmenah tako, da je število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno, v drugi fazi pa za vse klice izračunamo pričakovano število posameznih izidov. Izhodni rezultat vsakega koraka je izhodni vektor stanj.



Slika 5.2: Shema optimalnega razporejanja telefonskih klicev na k-tem koraku

Hitro lahko ugotovimo, da opisani proces razporejanja klicev na vsakem koraku posebej ustreza pogojem markovskega odločitvenega procesa, kjer je:

- prostor stanj na začetku procesa množica vseh možnih zgodovin na začetku trenutnega koraka, prostor stanj na koncu procesa pa množica vseh možnih zgodovin na koncu trenutnega koraka,
- množica odločitev v procesu množica odločitvenih spremenljivk v operacijski matriki, katerih vrednosti so enake verjetnostim za izbor izmen, v katerih bodo opravljeni posamezni klici,
- množica prehodnih verjetnosti podana s prehodno matriko,
- korist v procesu število uspešno kontaktiranih klicev.

Optimalna strategija procesa ustreza na vsakem koraku optimalni razporeditvi telefonskih klicev po delovnih izmenah in zagotavlja maksimalno pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev.

5.3 Rešitev matematičnega modela

Predpostavili smo, da telefonsko anketiranje poteka v več zaporednih korakih, na vsakem koraku pa želimo po izmenah optimalno razporediti klice, ki v predhodnem koraku niso bili uspešno kontaktirani, razen v prvem koraku, ko razporedimo po izmenah vse klice. Na vsakem koraku posebej je potrebno določiti operacijsko matriko po modelu 5.8 tako, da bo število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno, kar pomeni, da želimo maksimizirati vsoto tistih stanj izhodnega vektorja, ki podajajo uspešno kontaktirane klice.

Na vsakem koraku moramo določiti vrednosti odločitvenih spremenljivk, ki so kot elementi operacijske matrike verjetnosti, s katerimi razporedimo neuspešno kontaktirane klice predhodnega koraka po delovnih izmenah. Iz navade označimo neznano operacijsko matriko ${}^{k}O_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$ z ${}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$, ki naj bo

$$
{}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} {}^{k}h_1 & \cdots & {}^{k}h_d \end{array} \\
\begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ \\ \end{array} &
\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}1} & \cdots & x_{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}d} \end{bmatrix}
\end{array} \tag{5.10}
$$

Vsota vsake vrstice v operacijski matriki je enaka 1, vsote po stolpcih pa se nanašajo na razpoložljivost anketarjev. Ker vrednosti odločitvenih spremenljivk ne poznamo vnaprej, ne vemo, kolikšne bodo njihove vsote po stolpcih, čeprav vemo, koliko klicev lahko opravimo po delovnih izmenah. Zato bomo namesto matrike ${}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$ optimirali matriko 5.11 iz modela 5.4, v kateri je vsota vsake vrstice enaka istoležni komponenti vhodnega vektorja stanj, vsote po stolpcih pa številu klicev, ki jih lahko opravimo po posameznih izmenah.

$$
{}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} = \begin{array}{c c c}
 & \begin{array}{ccc} {}^{k}h_1 & \cdots & {}^{k}h_d \end{array} & \\
\begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} &
\begin{bmatrix} s_1x_{11} & \cdots & s_1x_{1d} \\ s_2x_{21} & \cdots & s_2x_{2d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} &
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\
 & \begin{array}{ccc} c_1 & \cdots & c_d \end{array} &
\end{array} \tag{5.11}
$$

S $c_i,\ i = 1, 2,\ \ldots,\ d$, so označene komponente vektorja ${}^{k}c$ in podajajo število klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah.

Cilj optimizacije je, da na vsakem koraku posebej določimo vrednosti odločitvenih spremenljivk v operacijski matriki. Po predpostavkah pri formulaciji problema in glede na označbe, ki so bile vpeljane, lahko za k-ti korak povzamemo v matematični obliki naslednje ugotovitve:

1. Odločitvene spremenljivke

$$x_{ij}, \quad i = 1, \ldots, (d \cdot (p-1))^{(k-1)}, \quad j = 1, \ldots, d$$

v operacijski matriki ${}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$ so verjetnosti, s katerimi razporedimo klice po izmenah, zato ustrezajo pogoju nenegativnosti:

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, (d \cdot (p-1))^{(k-1)}, \quad \forall j = 1, \ldots, d \tag{5.12}$$

2. Vsote po vrsticah v matriki 5.11

$$^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$$

so enake komponentam vhodnega vektorja stanj $^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}}$, kar lahko zapišemo v matrični obliki

$$\left(^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}\right) \cdot \underline{1} = {}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \tag{5.13}$$

kjer je $\underline{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ vektor dimenzije d. V eksplicitni obliki zapisan sistem enačb je

$$\sum_{j=1}^{d} s_i x_{ij} = s_i, \quad \forall i = 1, \ldots, (d \cdot (p-1))^{(k-1)} \tag{5.14}$$

3. Vsote po stolpcih v matriki 5.11

$$^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}$$

so enake številom klicev, ki jih lahko opravimo po posameznih delovnih izmenah. V matrični obliki zapisan sistem je

$$\underline{1}^T \cdot \left(^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}\right) = {}^{k}c \tag{5.15}$$

kjer je $\underline{1}^T = (1, 1, \ldots, 1)$ vektor dimenzije $(d\cdot(p-1))^{k-1}$. V eksplicitni obliki zapisan sistem enačb je

$$\sum_{i=1}^{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}} s_i x_{ij} = c_j, \quad \forall j = 1, \ldots, d \tag{5.16}$$

4. Na k-tem koraku želimo klice razporediti tako, da bo število uspešno kontaktiranih klicev maksimalno, zato moramo najprej izračunati pričakovano število posameznih izidov za klice z enako zgodovino za vsako izmeno, kar storimo z matriko 5.17

$$(^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}) \boxdot {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p}$$

iz modela 5.8.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} {}^{k}o_1 & \cdots & {}^{k}o_d \end{array} \\ \begin{array}{c} {}^{k-1}\pi_1 \; {}^{k}h_1 \\ {}^{k-1}\pi_2 \; {}^{k}h_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} s_1x_{11}p_{11} & \cdots & s_1x_{11}p_{1p} \\ s_2x_{21}p_{21} & \cdots & s_2x_{21}p_{2p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.17}$$

Predpostavimo, da verjetnosti za nastop uspešno kontaktiranih klicev v prehodni matriki ${}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p}$ podaja prvi stolpec, zato iščemo maksimum vsote prvega stolpca matrike 5.17, kar lahko v matrični obliki zapišemo kot

$$ {}^{k}f = \underline{1}^{T} \cdot (({}^{k-1}S_{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \odot {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d}) \boxdot {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p}) \cdot E_1 \tag{5.18} $$

kjer je $\underline{1}^{T} = (1, 1, \ldots, 1)$ vektor dimenzije $d \cdot (d \cdot (p-1))^{k-1}$ in $E_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ enotski vektor dimenzije p.

V eksplicitni obliki zapisan izraz je enak

$$ {}^{k}f = \sum_{i=1}^{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d(d\cdot(p-1))^{k-1}} s_i x_{ij} p_{k1} \tag{5.19} $$

Hitro lahko ugotovimo, da točke 1. do 4. ustrezajo definiciji linearnega programa iz poglavja 4.2:

- Verjetnosti v operacijski matriki, s katerimi razporedimo klice po izmenah in so podane v točki 1. s pogojem 5.12, so nenegativne odločitvene spremenljivke linearnega programa.

- Točki 2. in 3. podajata omejitve v linearnem programu. Sistem enačb 5.13 oziroma 5.14 določa, da so vsote po vrsticah v matriki 5.11 enake številu klicev z enako zgodovino, ki jih moramo na k-tem koraku optimalno razporediti. Sistem enačb 5.15 oziroma 5.16 določa, da morajo biti vsote po stolpcih v matriki 5.11 enake številu klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah.

- Izraz 5.18 oziroma 5.19 v točki 4. je ciljna funkcija linearnega programa. Ker je njena vrednost enaka številu uspešno kontaktiranih klicev, iščemo njen maksimum.

Pri tem so bile upoštevane in izpolnjene vse predpostavke linearnega programa o linearnosti, zveznosti in gotovosti iz točke 4.1:

- Ciljna funkcija ${}^{k}f$ ter izrazi na levi strani sistemov omejitvenih enačb 5.14 in 5.16 so linearne kombinacije odločitvenih spremenljivk x_{ij}.

- Vrednosti odločitvenih spremenljivk x_{ij} so verjetnosti, ki lahko zavzamejo katerokoli vrednost iz intervala $[0, 1]$, zato je izpolnjen pogoj zveznosti.

- Vhodni podatki pri telefonskem anketiranju so število telefonskih številk, ki jih moramo poklicati, vnaprej ocenjene prehodne matrike stanj za vse korake in število klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah. Ti podatki so določeni z gotovostjo.

Koeficienti ciljne funkcije so na vsakem koraku posebej enaki produktom ustreznih frekvenc vhodnega vektorja stanj in verjetnosti za nastop izida uspešno kontaktiranje. Čeprav je sam proces stohastičen, ker pričakujemo izide klicev s prehodnimi verjetnostmi, je na začetku vsakega koraka število klicev, ki jih moramo opraviti v trenutnem koraku, znano vnaprej. Privzamemo lahko, da je ta vhodni podatek za linearni program podan z gotovostjo, iz česar sledi, da so tudi koeficienti ciljne funkcije in sistema omejitvenih enačb določeni z gotovostjo.

O oblikovanem linearnem programu lahko povemo še več, če ga primerjamo s klasičnim transportnim problemom, ki je bil opisan v poglavju 4.6:

- Pri razporejanju telefonskih klicev lahko stanja klicev na začetku koraka obravnavamo kot izvore, izmene, v katerih lahko opravimo vnaprej določeno število klicev, pa kot ponore.

- Pri transportnem problemu so vrednosti odločitvenih spremenljivk enake količinam materiala, ki ga prepeljemo od posameznega izvora do posameznega ponora, pri razporejanju klicev pa so vrednosti odločitvenih spremenljivk enake deležem klicev posameznih stanj, ki jih razporedimo po razpoložljivih izmenah.

- Pri transportnem problemu iščemo minimum ciljne funkcije, katere vrednost je enaka skupnim prevoznim stroškom, pri razporejanju klicev pa iščemo maksimum ciljne funkcije, katere vrednost je enaka skupnemu številu uspešno kontaktiranih klicev. Pri transportnem problemu so uteži v ciljni funkciji prevozni stroški na enoto materiala od posameznega izvora do posameznega ponora, pri razporejanju klicev pa produkti ustreznih frekvenc vhodnega vektorja stanj in verjetnosti za nastop uspešno kontaktiranih klicev za vsa vhodna stanja koraka, ki so bila razporejena v vse razpoložljive izmene.

Obravnavani problem torej na vsakem koraku posebej ustreza pogojem transportnega problema, ki ga lahko rešimo s simpleksno metodo, za kar je potrebno sistem omejitvenih linearnih enačb 5.14 in 5.16 zapisati v kanonični obliki, da bo v vsaki enačbi nastopala natanko ena spremenljivka, ki bo imela v tej enačbi koeficient 1, v vseh ostalih enačbah pa koeficient 0. Enačbe 5.14 ustrezajo temu pogoju, v enačbah 5.16 izpolnimo ta pogoj tako, da vsaki enačbi prištejemo po eno umetno spremenljivko. Ker je linearni program pri razporejanju telefonskih klicev zaradi predpostavke, da je skupno število klicev, ki jih moramo opraviti v k-tem koraku, enako skupnemu številu klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah, uravnotežen, lahko eno od enačb 5.14 in 5.16 izpustimo, ker je že določena z ostalimi enačbami, recimo enačbo za $j = d$. Potem potrebujemo le $d-1$ umetnih spremenljivk, ki jih označimo z $u_j,\ j = 1, \ldots, d-1$. Linearni program s sistemom omejitvenih enačb v kanonični obliki je potem

$$\begin{aligned}
x_{ij} &\geq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, (d \cdot (p-1))^{(k-1)}, \quad \forall j = 1, \ldots, d \\
u_j &\geq 0, \quad \forall j = 1, \ldots, d-1 \\
\sum_{j=1}^{d} s_i x_{ij} &= s_i, \quad \forall i = 1, \ldots, (d \cdot (p-1))^{(k-1)} \\
\sum_{i=1}^{(d\cdot(p-1))^{(k-1)}} (s_i x_{ij} + u_j) &= c_j, \quad \forall j = 1, \ldots, d-1
\end{aligned}$$

Pri danih pogojih iščemo maksimum ciljne funkcije

$$\sum_{i=1}^{(d\cdot(p-1))^{k-1}} \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d(d\cdot(p-1))^{k-1}} s_i x_{ij} p_{k1} \tag{5.20}$$

Metoda simpleksov bo optimalno razporedila neuspešno kontaktirane klice predhodnega koraka tako, da bo v trenutnem koraku razporedila največje število klicev z enako zgodovino v tiste izmene, v katerih je verjetnost kontaktiranja največja.

5.4 Analiza rezultatov in evalvacija

5.4.1 Analiza predpostavk modela

Pri formulaciji modela je bilo postavljenih veliko predpostavk, s katerimi je bil model poenostavljen.

Zelo pomembna je bila predpostavka, da vsako telefonsko številko na vsakem koraku pokličemo natanko enkrat v natanko eni od izmen. Lahko bi dopustili tudi možnost, da isto telefonsko številko pokličemo večkrat v isti izmeni ali da isto telefonsko številko pokličemo še v kateri drugi izmeni istega koraka. V obeh primerih bi dobili nekaj več možnih izhodnih stanj, za katere bi morali dodatno oceniti prehodne verjetnosti za nastop posameznih izidov. Obe možnosti bi bili primerni, če bi bila telefonska številka v času klicanja npr. zasedena, ker bi to pomenilo, da je nekdo doma in ga bomo s ponovnim klicem v isti ali naslednji izmeni istega dne uspeli kontaktirati. Zasedene telefonske števike bi npr. poklicali čez 10 minut, zato bi morali oceniti prehodne verjetnosti za izide teh klicev. Za ostale številke, ki jih ne bi ponovno poklicali v tej izmeni, npr. tiste, ki so imele izid zvonjenje v prazno, bi določili izid nepoklicana telefonska številka. Ne glede na obsežnost opisanih možnosti, bi bilo problem še vedno mogoče zapisati kot linearni program in ga rešiti z metodo simpleksov.

Postavljena je bila tudi predpostavka o zmogljivosti anketarjev oziroma predpostavka o številu klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah na vsakem koraku. Predpostavili smo, da je zmogljivost natanko tolikšna, kot je število klicev, ki jih moramo opraviti. Če bi bila zmogljivost manjša, bi morali preostale klice opraviti v naslednjem koraku, zato bi med izide morali dodati še možnost, da klic ni bil opravljen. Če bi bila zmogljivost večja od števila klicev, ki jih moramo opraviti na trenutnem koraku, bi morali dodati navidezne klice, da bi linearni program uravnotežili. V vseh opisanih primerih bi problem še vedno rešili z linearnim programom.

Na vsakem koraku smo izločili uspešno kontaktirane klice, da smo problem nekoliko poenostavili. Če bi upoštevali tudi te klice, bi morali zanje v prehodni matriki v naslednjem koraku določiti za izid uspešno kontaktiran klic prehodno verjetnost 1, za vse ostale izide pa 0, kar ne bi spremenilo načina reševanja problema.

5.4.2 Lastnosti modela

Opisani problem razporejanja telefonskih klicev je po naravi stohastičen dinamičen odločitveni proces s končno mnogo diskretnimi stanji v diskretnem času.

Pri oblikovanju modela je bilo potrebno posebno pozornost posvetiti trem vprašanjem, in sicer ali problem ustreza pogojem markovskega odločitvenega problema, ali lahko poiščemo njegovo optimalno rešitev na vsakem koraku z linearnim programom ter ali so koeficienti linearnega programa določeni z gotovostjo.

Pokazano je bilo, da proces razporejanja klicev na vsakem koraku posebej ustreza pogojem markovskega odločitvenega procesa, pri katerem prostor stanj na začetku procesa ni enak prostoru stanj na koncu, ker se zaradi odločitev v procesu število stanj poveča. Prav tako je bilo pokazano, da optimalno rešitev procesa poiščemo z linearnim programom, ker so ciljna funkcija in sistem omejitvenih enačb linearne funkcije odločitvnih spremenljivk. Predpostavka o gotovosti koeficientov linearnega programa v prvi fazi optimizacije je bila upravičena, ker so frekvence posameznih stanj in prehodne verjetnosti na začetku vsakega koraka znane vnaprej, stohastičnost procesa pa se kaže v drugi fazi optimizacije, ko izračunamo pričakovano število posameznih izidov.

Če predpostavimo, da kličemo v končno mnogo korakih, je čas končna diskretna spremenljivka. Pri oblikovanju predpostavk modela nismo privzeli nobenih omejitev glede števila korakov, zato lahko opisani problem obravnavamo kot neskončen proces, čeprav ta možnost ne opisuje realne situacije, ker nikoli ne kličemo neskončno dolgo.

Pri anketiranju ponovno pokličemo le tiste telefonske številke, pri katerih nismo uspeli vzpostaviti nobenega kontakta z nobenim članom gospodinjstva, telefonske številke, s katerimi pa smo vzpostavili kontakt, ne bomo več klicali. Številke, ki jih ponovno pokličemo, lahko svoje stanje ohranijo ali spremenijo. Tako lahko številka, na katero se v predhodnem koraku ni nihče oglasil, ostane v naslednjem koraku še vedno neodgovorjena ali spremeni svoje stanje v npr. zasedeno telefonsko številko. Vendar, ko je klic enkrat uspešno kontaktiran, svojega izida ne spremeni več, ker ga ne razporejamo naprej. Na vsakem koraku torej nekaj izidov postane uspešno kontaktiranih, ostali pa ohranijo ali spremenijo svoje stanje, od koder lahko sklepamo, da bi bili po dovolj velikem številu korakov vsi klici uspešno kontaktirani. V realni situaciji se omejimo na končno mnogo korakov, zato je pri velikem številu potrebnih klicev v raziskavi pričakovati, da bo ostalo nekaj klicev neuspešno kontaktiranih.

5.4.3 Postoptimalna analiza in testiranje veljavnosti modela

Postoptimalna analiza obravnava vpliv spreminjanja vrednosti koeficientov ciljne funkcije, koeficientov na levi strani omejitvenih enačb in koeficientov na desni strani omejitvenih enačb na optimalno rešitev linearnega programa. Pri razporejanju neuspešno kontaktiranih telefonskih klicev so koeficienti linearnega programa določeni s številom klicev, ki jih moramo opraviti v raziskavi, s prehodnimi verjetnostmi in s številom klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah. Postoptimalna analiza bi vključevala predvsem obravnavo vpliva spremembe prehodnih verjetnosti in spremembe števila klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah, na optimalno rešitev.

Postoptimalna analiza bi lahko vključevala tudi obravnavo vrednosti dualnih spremenljivk. Dualni linearni program bi za obravnavani problem oblikovali, kot je bilo opisano v poglavju 4.6.1. Vrednosti dualnih spremenljivk bi povedale, za koliko bi se spremenilo skupno število uspešno kontaktiranih klicev, če bi za eno enoto spremenili eno od konstant na desni strani omejitvenih enačb, torej frekvenco klicev z enako zgodovino, ali pa če bi za eno enoto spremenili razpoložljivost anketarjev v eni od izmen.

Za testiranje veljavnosti modela nimamo trenutno nobenega prijema, zato bomo v naslednjem poglavju izvedli simulacijo, ki nam bo v pomoč pri razmišljanju o tem vprašanju.

6. SIMULACIJA RAZPOREJANJA TELEFONSKIH KLICEV

V nadaljevanju je, za ilustracijo, prikazana simulacija oblikovane optimalne strategije razporejanja telefonskih klicev. Prehodne matrike, ki bi jih bilo potrebno oceniti na podlagi podatkov podobnih anket, so izmišljene, vendar simulacija kljub temu dobro služi za razumevanje strategije.

Za preverjanje učinkovitosti oblikovane strategije je narejena še simulacija naključnega razporejanja telefonskih klicev, ki ustreza anketarjevi samostojni odločitvi, kako bo na posameznem koraku razporedil klice po delovnih izmenah. Anketarjeva razporeditev je za vsak korak podana z matriko, ki ima enak pomen kot operacijska matrika pri optimalni strategiji. Njeni elementi po vrsticah so enaki verjetnostim, s katerimi bi anketar klice z enako zgodovino poklical v razpoložljivih izmenah, in so za namen simulacije izmišljene.

Simulacije so bile opravljene s programskim paketom R. Metoda simpleksov je bila izvedena s funkcijo *simplex* iz knjižnice *boot*, ki zahteva naslednje argumente: koeficiente ciljne funkcije, matriko koeficientov sistema omejitvenih enačb (ali neenačb) ter koeficiente desne strani omejitvenih enačb (ali neenačb), ki sem jih oblikovala za vsak korak.

Za obe simulaciji bomo privzeli nekaj skupnih predpostavk. Najprej privzemimo, da želimo vzpostaviti kontakt s 1000 telefonskimi številkami ter da lahko vsak dan oziroma na vsakem koraku kličemo v dveh izmenah ($d = 2$):

- popoldne (P) ali
- zvečer (Z).

Privzemimo tudi, da se lahko v vsaki izmeni zgodijo trije različni izidi ($p = 3$):

- kontaktiranje je bilo uspešno oziroma klic je bil odgovorjen (O),
- nihče ni dvignil slušalke oziroma klic je bil neodgovorjen (N),
- telefonska številka je bila zasedena (B).

Privzeli bomo še, da je v obeh primerih na vsakem koraku uporabljena ista prehodna matrika. Z upoštevanjem ugotovitev dosedanjih raziskav so prehodne verjetnosti za nastop uspešno kontaktiranih klicev izbrane tako, da so v vsakem koraku manjše kot v predhodnih korakih.

Razporejanje klicev bo v obeh primerih narejeno za šest zaporednih korakov, zato predpostavimo še, da je v obeh primerih na vsakem koraku enaka razpoložljivost anketarjev. Privzemimo, da lahko na prvem koraku opravimo v popoldanski izmeni 300 klicev, zvečer pa preostalih 700. Na drugem koraku lahko opravimo popoldne 200 klicev in zvečer preostale klice, na tretjem, četrtem, petem in šestem koraku pa popoldne 50 klicev, ostale klice zopet zvečer.

6.1 Simulacija optimalnega razporejanja telefonskih klicev

Prvi korak $(k = 1)$**:**
Naj bo prehodna matrika prvega koraka

$$ {}^{k}P_{d\cdot(d\cdot(p-1))^{k-1}\times p} = {}^{1}P_{2\times 3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Z \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \end{array}\right] \end{array} \tag{6.1} $$

Če je bil klic prvega dne opravljen popoldne, je verjetnost za uspešno kontaktiranje 0.5, za neodgovorjen klic 0.4 in za zasedeno telefonsko številko 0.1. Če pa je bil klic opravljen zvečer, je verjetnost za uspešno kontaktiranje 0.6, za neodgovorjen klic 0.2 in za zasedeno telefonsko številko 0.2.

Privzeli smo, da želimo vzpostaviti kontakt s 1000 telefonskimi številkami, zato je vhodni vektor stanj prvega koraka

$$ {}^{k-1}S_{(d\cdot p)^{k-1}} = {}^{0}S_{1} = [1000] \tag{6.2} $$

Ker je vhodni vektor stanj enodimenzionalen, klice pa lahko opravljamo v dveh izmenah, je neznana operacijska matrika, s pomočjo katere razporedimo klice znotraj posameznih izmen, dimenzije 1×2. Če jo označimo z ${}^{1}X_{1\times 2}$, je

$$ {}^{k}X_{(d\cdot(p-1))^{k-1}\times d} = {}^{1}X_{1\times 2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \end{array}\right] \end{array} \tag{6.3} $$

Z $x_{11} \geq 0$ je označena verjetnost, da bo klic opravljen popoldne, in z $x_{12} \geq 0$, da bo opravljen zvečer. Po lastnostih operacijske matrike je vsota vrstice matrike 6.3 enaka 1.

Sistem omejitvenih enačb linearnega programa določa matrika 6.4.

$$ {}^{0}S_1 \odot {}^{1}X_{1\times 2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1000x_{11} & 1000x_{12} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.4} $$

Ker je v matriki 6.4 vsota vrstice enaka 1000, vsota prvega stolpca 300 in vsota drugega stolpca 700, je sistem omejitvenih enačb

$$ \begin{array}{ccccc} 1000x_{11} & + & 1000x_{12} & = & 1000 \\ 1000x_{11} & & & = & 300 \end{array} $$

Tretja enačba $1000x_{12} = 700$ ni potrebna, ker je linearni program uravnotežen. Določena je že z enačbama 6.1, ker je vsota po vrsticah v matriki 6.3 enaka vsoti po stolpcih.

Doseči želimo čim večje število uspešno kontaktiranih klicev, zato iščemo maksimum ciljne funkcije, ki je glede na to, da so verjetnosti za izid uspešno kontaktiranih klicev v matriki 6.1 podane v prvem stolpcu, enaka vsoti prvega stolpca matrike 6.5 iz modela 5.8.

$$ ({}^{0}S_1 \odot {}^{1}X_{1\times 2}) \boxdot {}^{1}P_{2\times 3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 500x_{11} & 400x_{11} & 100x_{11} \\ 600x_{12} & 200x_{12} & 200x_{12} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.5} $$

Ciljna funkcija, katere maksimum iščemo, je zato

$$ f(x_{11}, x_{12}) = 500x_{11} + 600x_{12} $$

Rešitev linearnega programa je operacijska matrika

$$ {}^{1}X_{1\times 2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.6} $$

Z množenjem vhodnega vektorja stanj 6.2 in matrike 6.6 dobimo matriko 6.7, ki podaja optimalno razporeditev klicev po izmenah.

$$ {}^{0}S_1 \odot {}^{1}X_{1\times 2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 700 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.7} $$

Opravimo naj torej 300 klicev popoldne in 700 klicev zvečer, kar ob danih začetnih pogojih in podatkih ni presenetljiv rezultat, saj klici v prvem koraku še nimajo zgodovine. Matrika 6.8 iz modela 5.8 pove pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev (O), neodgovorjenih klicev (N) in pričakovano število zasedenih telefonskih številk (B) po izmenah.

$$ ({}^{0}S_1 \odot {}^{1}O_{1\times 2}) \boxdot {}^{1}P_{2\times 3} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Z \end{array} & \begin{bmatrix} 150 & 120 & 30 \\ 420 & 140 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.8} $$

Po vektorizaciji matrike 6.8 dobimo izhodni vektor stanj prvega koraka 6.9.

$$
{}^{1}S_{6} = \begin{array}{cccccc} PO & ZO & PN & ZN & PB & ZB \\ \end{array}
$$
$$
{}^{1}S_{6} = \left[\begin{array}{cccccc} 150 & 420 & 120 & 140 & 30 & 140 \end{array}\right] \tag{6.9}
$$

Pri vsakem stanju izhodnega vektorja je zapisana zgodovina klicev tega stanja. Tako pomeni zapis PO pri prvi komponenti vektorja, da je bilo 150 klicev opravljenih popoldne (P) z izidom uspešno kontaktiranje (O). Komponente izhodnega vektorja povedo, da lahko po prvem koraku pričakujemo 570 uspešno kontaktiranih klicev (150 popoldne in 420 zvečer), 260 neodgovorjenih klicev (120 popoldne in 140 zvečer) ter 170 zasedenih telefonskih številk (30 popoldne in 140 zvečer).

Drugi korak ($k = 2$)**:**
Iz izhodnega vektorja stanj prvega koraka 6.9 izločimo uspešno kontaktirane klice in v nadaljevanju optimalno razporedimo le klice, ki v prvem koraku niso bili uspešno kontaktirani. Tako je 6.10 vhodni vektor stanj drugega koraka.

$$
\begin{array}{cccc} PN & ZN & PB & ZB \end{array}
$$
$$
{}^{1}S_{4} = \left[\begin{array}{cccc} 120 & 140 & 30 & 140 \end{array}\right] \tag{6.10}
$$

Vsota komponent vektorja 6.10 pove, da je potrebno opraviti 430 klicev. Glede na predpostavke jih 200 lahko opravimo popoldne, preostalih 230 pa zvečer. Prehodna matrika drugega koraka je dimenzije 8×3, njeni elementi pa naj bodo

$$
{}^{2}P_{8\times 3} = \begin{array}{c} \\ PNP \\ ZNP \\ PBP \\ ZBP \\ PNZ \\ ZNZ \\ PBZ \\ ZBZ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \end{array}\right] \end{array} \tag{6.11}
$$

V vsaki vrstici prehodne matrike je zapisana zgodovina klica na koncu prvega koraka in izmena, v kateri bo klic opravljen v trenutnem koraku. Tako zaporedje PNP v prvi vrstici pomeni, da je bil klic v prvem koraku opravljen popoldne P z izidom neodgovorjen klic N, v drugem koraku pa bo opravljen popoldne P. Za vse klice z zgodovino PNP je verjetnost za uspešno kontaktiranje 0.4, za zvonenje v prazno 0.2 in za zasedeno številko 0.4.

Če označimo neznano operacijsko matriko drugega koraka, katere odločitvene spremenljivke ustrezajo pogoju nenegativnosti, z ${}^{2}X_{4\times 2}$, je

$$
{}^{2}X_{4\times 2} = \begin{array}{c} \\ PN \\ PB \\ ZN \\ ZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.12}
$$

Vsota vsake vrstice v matriki 6.12 je zopet enaka 1.

Tako kot v prvem koraku, tudi tu zapišemo na podlagi matrike 6.13 sistem omejitvenih linearnih enačb, če upoštevamo, da so njene vsote po vrsticah enake komponentam vhodnega vektorja 6.10, da je vsota prvega stolpca 200 in vsota drugega stolpca 230, vendar zaradi uravnoteženosti linearnega programa zadnja enačba zopet ni potrebna.

$$
{}^{1}S_4 \odot {}^{2}X_{4\times 2} = \begin{array}{c} \\ PN \\ PB \\ ZN \\ ZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120x_{11} & 120x_{12} \\ 140x_{21} & 140x_{22} \\ 30x_{31} & 30x_{32} \\ 140x_{41} & 140x_{42} \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.13}
$$

Sistem omejitvenih enačb je za drugi korak

$$
\begin{array}{lllllllll}
120x_{11}+ & & & & 120x_{12} & & & & = 120 \\
 & 140x_{21}+ & & & & 140x_{22} & & & = 140 \\
 & & 30x_{31}+ & & & & 30x_{32} & & = 30 \\
 & & & 140x_{41}+ & & & & 140x_{42} & = 140 \\
120x_{11}+ & 140x_{21}+ & 30x_{31}+ & 140x_{41} & & & & & = 200
\end{array}
$$

Iščemo vrednosti odločitvenih spremenljivk, ki ustrezajo sistemu omejitvenih enačb, tako da bo imela ciljna funkcija

$$
f(x_{11},\ldots,x_{42}) = 48x_{11} + 42x_{21} + 15x_{31} + 56x_{41} + 48x_{12} + 70x_{22} + 12x_{32} + 70x_{42}
$$

ki je vsota prvega stolpca matrike $({}^{1}S_4 \odot {}^{2}X_{4\times 2}) \boxdot {}^{2}P_{8\times 3}$ iz modela 5.8, maksimum.

Optimalno razporeditev klicev po izmenah drugega koraka podaja matrika 6.14.

$$
{}^{1}S_4 \odot {}^{2}X_{4\times 2} = \begin{array}{c} \\ PN \\ PB \\ ZN \\ ZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 140 \\ 30 & 0 \\ 50 & 90 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.14}
$$

Matrika 6.15 podaja pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev, neodgovorjenih klicev in zasedenih telefonskih številk na koncu drugega koraka.

$$({}^{1}S_{4} \odot {}^{2}X_{4\times 2}) \boxdot {}^{2}P_{8\times 3} = \begin{array}{c} \\ PNP \\ ZNP \\ PBP \\ ZBP \\ PNZ \\ ZNZ \\ PBZ \\ ZBZ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\ \begin{bmatrix} 48 & 24 & 48 \\ 0 & 0 & 0 \\ 15 & 9 & 6 \\ 20 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 70 & 42 & 28 \\ 0 & 0 & 0 \\ 45 & 36 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.15}$$

Z vektorizacijo matrike 6.15 dobimo izhodni vektor drugega koraka 6.16.

$${}^{2}S_{24} = \begin{array}{c} PNPO \\ ZNPO \\ PBPO \\ ZBPO \\ PNZO \\ ZNZO \\ PBZO \\ ZBZO \\ PNPN \\ ZNPN \\ PBPN \\ ZBPN \\ PNZN \\ ZNZN \\ PBZN \\ ZBZN \\ PNPB \\ ZNPB \\ PBPB \\ ZBPB \\ PNZB \\ ZNZB \\ PBZB \\ ZBZB \end{array} \begin{bmatrix} 48 \\ 0 \\ 15 \\ 20 \\ 0 \\ 70 \\ 0 \\ 45 \\ 24 \\ 0 \\ 9 \\ 15 \\ 0 \\ 42 \\ 0 \\ 36 \\ 48 \\ 0 \\ 6 \\ 15 \\ 0 \\ 28 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

Komponente vektorja 6.16 povedo, da je skupno pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev enako 198, skupno število neodgovorjenih klicev 126 in skupno število zasedenih telefonskih številk 106.

Tretji korak ($k = 3$)**:**
V tretjem koraku je potrebno optimalno razporediti 232 klicev, ki v drugem koraku niso bili uspešno kontaktirani.

Vhodni vektor stanj tretjega koraka je izhodni vektor stanj drugega koraka 6.16 brez uspešno kontaktiranih klicev. Upoštevali bomo, da lahko v popoldanski izmeni opravimo 50 klicev, preostalih 182 pa zvečer.

Matrika prehodnih verjetnosti je za tretji korak dimenzije 32×3, njeni elementi pa naj bodo

$$
{}^{3}P_{32\times 3} = \begin{array}{c} \\ PNPNP \\ ZNPNP \\ PBPNP \\ ZBPNP \\ PNZNP \\ ZNZNP \\ PBZNP \\ ZBZNP \\ PNPBP \\ ZNPBP \\ PBPBP \\ ZBPBP \\ PNZBP \\ ZNZBP \\ PBZBP \\ ZBZBP \\ PNPNZ \\ ZNPNZ \\ PBPNZ \\ ZBPNZ \\ PNZNZ \\ ZNZNZ \\ PBZNZ \\ ZBZNZ \\ PNPBZ \\ ZNPBZ \\ PBPBZ \\ ZBPBZ \\ PNZBZ \\ ZNZBZ \\ PBZBZ \\ ZBZBZ \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0.1 & 0.4 & 0.5 \\
0.1 & 0.6 & 0.3 \\
0.2 & 0.3 & 0.5 \\
0.3 & 0.2 & 0.5 \\
0.3 & 0.1 & 0.6 \\
0.2 & 0.3 & 0.5 \\
0.1 & 0.1 & 0.8 \\
0.2 & 0.1 & 0.7 \\
0.2 & 0.4 & 0.4 \\
0.2 & 0.7 & 0.1 \\
0.3 & 0.5 & 0.2 \\
0.1 & 0.3 & 0.6 \\
0.1 & 0.5 & 0.4 \\
0.3 & 0.4 & 0.3 \\
0.1 & 0.4 & 0.5 \\
0.2 & 0.5 & 0.3 \\
0.2 & 0.3 & 0.5 \\
0.1 & 0.5 & 0.4 \\
0.3 & 0.3 & 0.4 \\
0.2 & 0.1 & 0.7 \\
0.1 & 0.4 & 0.5 \\
0.2 & 0.5 & 0.3 \\
0.2 & 0.3 & 0.5 \\
0.3 & 0.2 & 0.5 \\
0.3 & 0.1 & 0.6 \\
0.1 & 0.7 & 0.2 \\
0.3 & 0.4 & 0.3 \\
0.2 & 0.4 & 0.4 \\
0.1 & 0.5 & 0.4 \\
0.2 & 0.5 & 0.3 \\
0.3 & 0.5 & 0.2 \\
0.2 & 0.6 & 0.2
\end{bmatrix} \end{array} \tag{6.17}
$$

Podobno kot v prvem in drugem koraku zapišemo linearni program, katerega rešitev je operacijska matrika, ki jo označimo z ${}^{3}X_{16\times 2}$, matrika 6.18 pa podaja optimalno razporeditev klicev po izmenah v tretjem koraku.

$$
{}^2S_{16} \odot {}^3X_{16\times 2} = \begin{array}{c} \\ PNPN \\ ZNPN \\ PBPN \\ ZBPN \\ PNZN \\ ZNZN \\ PBZN \\ ZBZN \\ PNPB \\ ZNPB \\ PBPB \\ ZBPB \\ PNZB \\ ZNZB \\ PBZB \\ ZBZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 24 \\ 0 & 0 \\ 0 & 9 \\ 15 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 42 \\ 0 & 0 \\ 0 & 36 \\ 0 & 48 \\ 0 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \\ 28 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.18}
$$

Pričakovano število posameznih izidov glede na njhovo zgodovino daje matrika 6.19, iz katere lahko razberemo, da je pričakovati 60.6 uspešno kontaktiranih klicev, 71.4 neodgovorjenih klicev in 100 zasedenih telefonskih številk. Ker rezultati v tretjem koraku niso celoštevilski, bi lahko rezultate zaokrožili ali pa bi uporabili celoštevilsko linearno programiranje.

Podobno kot v prvih treh korakih ravnamo tudi v četrtem, petem in šestem koraku. Rezultati simulacij so za vseh šest korakov podani v tabeli 6.1, v kateri lahko za vsak korak preberemo število posameznih izidov, skupno število klicev, ki so bili opravljeni na posameznem koraku, in stopnjo kontaktiranja na posameznem koraku.

korak		1	2	3	4	5	6	*skupaj*
	O	570	198	60.6	40.4	29.1	23.1	920.2
izid	N	260	126	71.4	55.8	45.7	36.1	
	B	170	106	100	75.2	56.2	43.7	
skupaj		1000	430	232	171.4	131	101.9	2066.3
stopnja kont.		0.570	0.460	0.261	0.236	0.222	0.216	

Tabela 6.1: Rezultati simulacije optimalnega razporejanja telefonskih klicev

Rezultati v tabeli so odraz izmišljenih prehodnih verjetnosti. Ker smo predpostavili, da so prehodne verjetnosti za nastop izida uspešno kontaktirani klic na vsakem koraku manjše kot na predhodnem koraku, je tudi stopnja kontaktiranja na vsakem koraku manjša. V vseh šestih korakih je bilo opravljeno 2066.2 klicev, od tega je bilo 920.2 klicev uspešno kontaktiranih. Ker je vzorec vseboval 1000 telefonskih številk, je stopnja kontaktiranja 0.920.

$$
(^2S_{16} \odot {}^3X_{8\times 2}) \boxdot {}^3P_{16\times 3} = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} O & N & B \end{array} \\
\begin{array}{c}
PNPNP \\ ZNPNP \\ PBPNP \\ ZBPNP \\ PNZNP \\ ZNZNP \\ PBZNP \\ ZBZNP \\ PNPBP \\ ZNPBP \\ PBPBP \\ ZBPBP \\ PNZBP \\ ZNZBP \\ PBZBP \\ ZBZBP \\ PNPNZ \\ ZNPNZ \\ PBPNZ \\ ZBPNZ \\ PNZNZ \\ ZNZNZ \\ PBZNZ \\ ZBZNZ \\ PNPBZ \\ ZNPBZ \\ PBPBZ \\ ZBPBZ \\ PNZBZ \\ ZNZBZ \\ PBZBZ \\ ZBZBZ
\end{array} &
\begin{bmatrix}
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
4.5 & 3.0 & 7.5 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
1.8 & 3.0 & 1.2 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
8.4 & 11.2 & 8.4 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.2 & 0.5 & 0.3 \\
4.8 & 7.2 & 12.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
2.7 & 2.7 & 3.6 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
8.4 & 21.0 & 12.6 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
10.8 & 7.2 & 18.0 \\
14.4 & 4.8 & 28.8 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
3.0 & 6.0 & 6.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 \\
1.6 & 4.8 & 1.6
\end{bmatrix}
\end{array} \tag{6.19}
$$

6.2 Simulacija naključnega razporejanja telefonskih klicev

Za primerjavo z optimalnim razporejanjem telefonskih klicev naredimo še simulacijo z naključnim razporejanjem, ko anketar po svoji presoji odloči, v kateri izmeni bo na naslednjem koraku ponovno poklical telefonsko številko, s katero ni uspel vzpostaviti kontakta. Predpostavimo zopet, da želimo vzpostaviti kontakt s 1000 telefonskimi številkami in da je prehodna matrika na vsakem koraku enaka kot v primeru optimalnega razporejanja.

Prvi korak $(k = 1)$**:**
Privzeli smo, da lahko v prvem koraku zopet opravimo 300 klicev, zvečer pa preostalih 700, zato je glede na to, da razporedimo vseh 1000 klicev, operacijska matrika 6.20 enaka kot pri optimalnem razporejanju.

$$^{1}X_{1\times 2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.20}$$

Ker je tudi prehodna matrika enaka prehodni matriki 6.1, je rezultat po prvem koraku enak kot pri optimalnem razporejanju. Uspešno kontaktiranih oziroma odgovorjenih klicev je 570, neodgovorjenih 260 in zasedenih telefonskih številk 170. Izhodni vektor stanj 6.21 tega modela je enak izhodnemu vektorju stanj 6.9.

$$^{1}S_{6} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} PO & ZO & PN & ZN & PB & ZB \end{array} \\ \begin{bmatrix} 150 & 420 & 120 & 140 & 30 & 140 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.21}$$

Drugi korak $k = 2$**:**
V drugem koraku ponovno razporedimo 430 klicev, ki niso bili uspešno kontaktirani v prvem koraku. Prehodna matrika je enaka prehodni matriki 6.11, opravimo lahko 200 klicev popoldne, preostalih 230 pa zvečer. Privzemimo, da bo anketar naključno razporedil klice po izmenah z verjetnostmi, ki so podane v matriki 6.22.

$$^{2}X_{4\times 2} = \begin{array}{c} \\ PN \\ PB \\ ZN \\ ZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.50 & 0.50 \\ 0.70 & 0.30 \\ 0.40 & 0.60 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.22}$$

Anketar bo klice z zgodovino npr. PN razporedil tako, da jih bo 0.25 poklical popoldne (P) in 0.75 zvečer (Z). Razporeditev vseh klicev po izmenah podaja matrika 6.23.

$$^{1}S_{4} \odot {}^{2}X_{4\times 2} = \begin{array}{c} \\ PN \\ PB \\ ZN \\ ZB \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & Z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 30 & 90 \\ 70 & 70 \\ 21 & 9 \\ 56 & 84 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6.23}$$

Z vektorizacijo matrike $(^{1}S_{4} \odot {}^{2}X_{4\times 2}) \boxdot {}^{2}P_{8\times 3}$ dobimo izhodni vektor stanj 6.24, iz katerega lahko izračunamo, da je bilo 182.5 klicev uspešno kontaktiranih, pri 133.5 klicih ni nihče dvignil slušalke, pri 114 klicih pa je bila telefonska številka zasedena.

$$
{}^2S_{24} = \begin{array}{c} PNPO \\ ZNPO \\ PBPO \\ ZBPO \\ PNZO \\ ZNZO \\ PBZO \\ ZBZO \\ PNPN \\ ZNPN \\ PBPN \\ ZBPN \\ PNZN \\ ZNZN \\ PBZN \\ ZBZN \\ PNPB \\ ZNPB \\ PBPB \\ ZBPB \\ PNZB \\ ZNZB \\ PBZB \\ ZBZB \end{array} \begin{bmatrix} 12.0 \\ 21.0 \\ 10.5 \\ 22.4 \\ 36.0 \\ 35.0 \\ 3.6 \\ 42.0 \\ 6.0 \\ 21.0 \\ 6.3 \\ 16.8 \\ 27.0 \\ 21.0 \\ 1.8 \\ 33.6 \\ 12.0 \\ 28.0 \\ 4.2 \\ 16.8 \\ 27.0 \\ 14.0 \\ 3.6 \\ 8.4 \end{bmatrix} \tag{6.24}
$$

Podobno nadaljujemo v ostalih štirih korakih. Rezultati vseh šestih korakov so zbrani v tabeli 6.2.

korak		1	2	3	4	5	6	*skupaj*
	O	570	182.5	44.1	30.7	25.0	20.4	872.7
izid	N	260	133.5	100.1	87.9	75.5	65.9	
	B	170	114	103.3	84.8	72.2	61.4	
skupaj		1000	430	247.5	203.4	172.7	147.7	2201.3
stopnja kont.		0.570	0.460	0.178	0.151	0.145	0.138	

Tabela 6.2: Rezultati simulacije naključnega razporejanja telefonskih klicev

6.3 Primerjava rezultatov simulacij optimalnega in naključnega razporejanja telefonskih klicev

V obeh simulacijah so bili uporabljeni isti vhodni podatki. Tako je bila naloga vzpostaviti kontakt s 1000 telefonskimi številkami, na vsakem koraku je bila uporabljena ista prehodna matrika in na vsakem koraku je bila enaka razpoložljivost anketarjev. Rezultati simulacij so za oba načina razporejanja prikazani v tabeli 6.3.

korak	*izid*	*optimalno razporejanje*	*naključno razporejanje*
	O	570	570
1	*N*	260	260
	B	170	170
	O	198	182.5
2	*N*	126	133.5
	B	106	114
	O	60.6	44.1
3	*N*	71.4	100.1
	B	100.0	103.3
	O	40.4	30.7
4	*N*	55.8	87.9
	B	75.2	84.8
	O	29.1	25.0
5	*N*	45.7	75.5
	B	56.2	72.2
	O	22.1	20.4
6	*N*	36.1	65.9
	B	43.7	61.4

Tabela 6.3: Primerjava rezultatov simulacij optimalnega in naključnega razporejanja telefonskih klicev

V prvem koraku se rezultati obeh primerov ujemajo, saj klici še nimajo zgodovine, ostali podatki pa so enaki. Na vsakem nadaljnjem koraku je opaziti, da je pri optimalnem razporejanju več uspešno kontaktiranih klicev kot pri naključnem razporejanju, kar je bilo pričakovati.

Čeprav so bile stopnje kontaktiranja pri obeh simulacijah že podane, jih za lažjo primerljivost povzemimo še enkrat. V tabeli 6.4 je za oba načina razporejanja za vsak korak prikazano število opravljenih klicev, število uspešno kontaktiranih klicev in stopnja kontaktiranja.

	optimalno	razporejanje		naključno	razporejanje	
korak	št. klicev	št. uspešno kontakt. klicev	stopnja kontakt.	št. klicev	št. uspešno kontakt. klicev	stopnja kontakt.
1	1000.0	570.0	0.570	1000.0	570.0	0.570
2	430.0	198.0	0.460	430.0	182.5	0.424
3	232.0	60.6	0.261	247.5	44.1	0.178
4	171.4	40.4	0.236	203.4	30.7	0.151
5	131.0	29.1	0.222	172.7	25.0	0.145
6	101.9	22.1	0.216	147.7	20.4	0.138
skupaj	2066.3	920.2	0.445	2201.3	872.7	0.396

Tabela 6.4: Primerjava stopenj kontaktiranja na posameznem koraku pri optimalnem in naključnem razporejanju telefonskih klicev

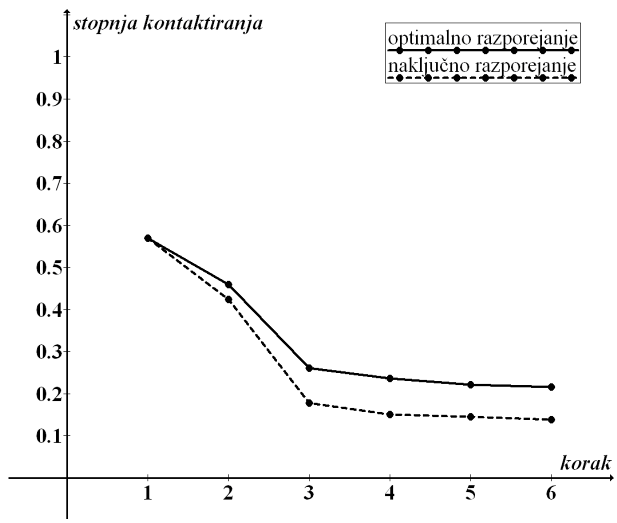
S primerjavo rezutatov obeh simulacij razporejanja klicev lahko opazimo, da so stopnje kontaktiranja v obeh primerih v vsakem naslednjem koraku manjše kot v predhodnih korakih, kar je posledica izbora prehodnih verjetnosti za uspešno kontaktiranje, ki so bile na vsakem naslednjem koraku manjše. Kljub temu pa kaže, da je bilo optimalno razporejanje učinkovitejše, saj je stopnja kontaktiranja na vsakem koraku višja kot pri naključnem razporejanju.

V šestih korakih je skupno število uspešno kontaktiranih klicev pri optimalnem razporejanju 920.2, pri naključnem razporejanju pa 872.7. Pri optimalnem razporejanju je bilo potrebno opraviti 2066.3 klicev, pri naključnem razporejanju pa 2201.3.

Ker je vzorec vseboval 1000 telefonskih številk, je stopnja kontaktiranja pri optimalnem razporejanju 0.920, pri naključnem razporejanju pa 0.873. Pri naključnem razporejanju je bilo torej potrebno opraviti 6.5% več klicev kot pri optimalnem razporejanju, pri tem pa je bila dosežena nižja stopnja kontaktiranja.

Sama stopnja kontaktiranja se torej ni bistveno povečala oziroma je bila zelo visoka v obeh primerih, vendar so podatki v nalogi izmišljeni. Pokazati smo želeli le, da je stopnja kontaktiranja v primeru optimalnega razporejanja višja in da je bilo potrebno opraviti manjše število klicev, kar je simulacija pokazala.

Stopnje kontaktiranja so za vseh šest korakov za oba načina razporejanja prikazane še na sliki 6.1.



Slika 6.1: Linijski grafikon stopenj kontaktiranja pri optimalnem in naključnem razporejanju telefonskih klicev

Razlike med stopnjami kontaktiranja se ne zdijo velike, vendar je to posledica izbora verjetnosti v prehodni matriki, ki so za uspešno kontaktirane klice v večerni izmeni le nekoliko večje kot v popoldanski. Če bi bile prehodne verjetnosti za uspešno kontaktiranje npr. veliko večje v večerni izmeni kot v popoldanski izmeni, bi bile razlike med stopnjami kontaktiranja večje, in sicer predvsem v primeru, ko bi se anketar odločil, da bo večje število klicev opravil popoldne.

Za analizo občutljivosti sem obe simulaciji večkrat ponovila še z drugimi podatki. Najprej sem pri istih prehodnih matrikah spreminjala razpoložljivost anketarjev po izmenah, nato pa pri isti razpoložljivosti anketarjev še verjetnosti v prehodnih matrikah.

Izkazalo se je, da spreminjanje razpoložljivosti anketarjev, to pomeni spreminjanje vrednosti komponent v vektorju ${}^{k}c$, ni bistveno vplivalo na optimalno rešitev. Razlog za to je zopet izbor verjetnosti v prehodni matriki, ki se za popoldansko in večerno izmeno niso veliko razlikovale. Če bi bile razlike v verjetnostih velike, bi bila razporeditev klicev po izmenah precej drugačna.

Pri spreminjanju verjetnosti v prehodni matriki, tako da so bile verjetnosti za nastop uspešnega kontaktiranja zvečer veliko večje kot v popoldanski izmeni, se je izkazalo, da je optimalno razporejanje še vedno bolj učinkovito kot naključno, vendar razlike med stopnjami kontaktiranja na posameznem koraku niso bile toliko večje, kot je bilo pričakovati.

Simulaciji sta pokazali, da je optimalno razporejanje klicev bolj učinkovito kot naključno razporejanje, vendar ne toliko, kot je bilo na začetku pričakovati. Morda bi morali v zgodovini klicev poleg izmen in izidov dodati še kakšen dejavnik, ki pomembno vpliva na uspešnost kontaktiranja in s tem na razporejanje klicev po izmenah.

7. SKLEP

V pričujočem delu so bili uresničeni vsi cilji, ki so bili podani v uvodu. Oblikovan je bil matematičen model za optimalno razporejanje telefonskih klicev, ki zagotavlja maksimalno pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev. Pokazano je bilo, da lahko proces klicanja opišemo z markovskim odločitvenim procesom, čigar optimalno rešitev na vsakem koraku posebej poiščemo s klasičnim transportnim problemom linearnega programiranja.

Samo strategijo razporejanja telefonskih klicev lahko povzamemo v nekaj točkah:

- Klicanje telefonskih številk poteka zaporedno po korakih. V prvem koraku pokličemo vse telefonske številke, s katerimi želimo v raziskavi vzpostaviti kontakt, vsako številko natanko enkrat v natanko eni od delovnih izmen. Neuspešno kontaktirane številke prvega koraka ponovno pokličemo v drugem koraku, zopet vsako številko natanko enkrat v natanko eni od izmen itd. Za vsako telefonsko številko zabeležimo izmeno, v kateri je bila opravljena, in izid klica. Zaporedje izmen in izidov klica imenujemo zgodovina klica.

- Izide posameznih klicev vsakega koraka lahko napovemo vnaprej le s prehodnimi verjetnostmi, ki so pogojne glede na izmeno, v kateri bo klic opravljen v trenutnem koraku, in glede na zgodovino klica na koncu predhodnega koraka. Izjema je le prvi korak, ker klici še nimajo zgodovine in so prehodne verjetnosti pogojne le na izmeno, v kateri bo klic opravljen.

- Klice na vsakem koraku posebej optimalno razporedimo po izmenah, tako da bo pričakovano število uspešno kontaktiranih klicev čim večje. Privzeli smo, da je skupno število klicev po izmenah, ki jih lahko opravimo, enako številu klicev, ki jih moramo opraviti.

Za aplikacijo oblikovane strategije razporejanja telefonskih klicev v praksi je bilo v pričujočem delu privzetih preveč predpostavk. Strategijo bi morali razširiti predvsem za naslednje možnosti:

- skupno število vseh klicev, ki jih moramo opraviti na določenem koraku, je lahko večje ali manjše od skupnega številu klicev, ki jih lahko opravimo po izmenah na tem koraku;

- pri ocenjevanju prehodnih verjetnosti bi lahko upoštevali več dejavnikov, ki vplivajo na izid klica, in ne le zaporedje izmen in izidov predhodnih poskusov klicev;

- neuspešno kontaktiran klic bi lahko ponovili tudi v isti izmeni ali v istem koraku v naslednji izmeni, za kar bi morali oceniti dodatne prehodne verjetnosti.

Primerjava rezultatov simulacij optimalnega in naključnega razporejanja klicev je pokazala, da je optimalno razporejanje z oblikovanim modelom učinkovitejše, saj je bila pri manjšem številu klicev dosežena višja stopnja kontaktiranja, vendar le za nekaj odstotnih točk, kar ne opravičuje stroškov, vloženih v ocenjevanje prehodnih verjetnosti za nastop vseh možnih izidov klica. Oblikovano strategijo bi morali preveriti tudi na dejanskih podatkih, pri čemer bi bilo smiselno upoštevati več dejavnkov, ki vplivajo na uspešnost kontaktiranja. Prehodne verjetnosti bi bile s tem natančneje določene, sama strategija pa bi se morda izkazala za učinkovitejšo.

Pri analizi oblikovane strategije se postavlja vprašanje, ali bi drugačna razporeditev klicev na enem (ali več) izmed korakov povečala skupno število uspešno kontaktiranih klicev. Privzemimo, da je število korakov omejeno in določeno vnaprej. Pri oblikovani strategiji poteka optimizacija zaporedno po korakih tako, da najprej optimalno razporedimo klice v prvem koraku, nato neuspešno kontaktirane klice prvega koraka po izmenah v drugem koraku itd, kar pomeni, da najprej poiščemo operacijsko matriko za prvi korak, nato za drugi itd, zato bi lahko oblikovano strategijo imenovali lokalna optimizacija. Da bi preverili, ali je rešitev tako oblikovane strategije hkrati tudi globalna rešitev problema, bi morali oblikovati matematični model, s katerim bi poiskali operacijske matrike posameznih korakov hkrati za vse korake. Ugotoviti bi morali, ali obstajajo pogoji, pri katerih sta optimalni rešitvi (število uspešno kontaktiranih klicev) v obeh primerih enaki.

Oblikovani model za razporejanje telefonskih klicev bi bilo mogoče uporabiti tudi v druge namene, kot na primer v proizvodnem, marketinškem ali investicijskem procesu.

Literatura

[1] Biemer, P. P., Lyberg, L. E. (2003): Introduction to Survey Quality. New Jersey: Wiley.

[2] Bronstein, I. N., Semendjajev, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. (1997): Matematični priročnik. Ljubljana: Tehniška založba Slovenije.

[3] Cormen, T. H., Leiserson, C. E, Rivest, R. L. (1990): Introduction to Algorithms. New York: McGraw Hill.

[4] Čižman, A. (2004): Operacijske raziskave: teorija in uporaba v organizaciji. Kranj: Moderna organizacija.

[5] Dimovski, V., Pengar, S., Škerlavaj, M. (2005): Metode raziskovalnega dela, 1. in 2. del. Ljubljana: Ekonomska fakulteta v Ljubljani.

[6] Dobrenić, S. (1978): Operativno istraživanje. Varaždin: Fakultet organizacije i informatike Varaždin.

[7] Falthzik, A. M. (1972): When to Make Telephone Interviews. Journal of Marketing Research, vol. 9, 451-452.

[8] Grasselli, J., Vadnal, A. (1986): Linearna algebra. Linearno programiranje. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

[9] Greenberg, B. S., Stokes, S. L. (1990): Developing an Optimal Call Scheduling Strategy for a Telephone Survey. Journal of Official Statistics, vol. 6, 421-435.

[10] Groves, R., Kahn, R.: Survey by Telephone (1979): A National Comparison with Personal Interviews. New York: Academic Press.

[11] Grimmett, G. R., Stirzaker, D. R. (2000): Probability and Random Processes, 2. izdaja, Oxford: Oxford University Press.

[12] Gulati, S., Malcom, S. A. (2001): Call Center Scheduling Technology Evaluation Using Simulation. Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference.

[13] Hillier, F. S., Lieberman, G. J. (2001): Introduction to Operations Research. New York: McGraw Hill.

[14] Hudoklin Božič, A. (1999): Stohastični procesi. Kranj: Univerza v Mariboru, Fakulteta za organizacijske vede.

[15] Hunt, F. Y., Kearsley, A. J., O'Gallagher (2003): A Linear Programming Based Algorithm for Multiple Seuence Alignments. Proceedings of the Computational System Bioinformatics.

[16] Jamnik, R. (1987): Verjetnostni račun. Ljubljana: Mladinska knjiga.

[17] Kalton, G., Vehovar, V. (2001): Vzorčenje v anketah. Ljubljana: Fakulteta za družbene vede, Univerza v Ljubljani.

[18] Košmelj, B., et al. (2001): Statistični terminološki slovar. Ljubljana: Statistično društvo Slovenije in Statistični urad Slovenije.

[19] Kulka, R. A., Weeks, M. F. (1988): Toward the Development of Optimal Calling Protocols for Telephone Surveys: A Conditional Probabilities Approach. Journal of Official Statistics, vol. 4, 319-332.

[20] Kveder, A., Vehovar, V. (1999): An Elaborate Calling Strategy - Does it Make Enough Difference? Portland, Oregon: International Conference on Survey Nonresponse.

[21] Meško, I. (1999): Optimizacija poslovanja. Maribor: Ekonomsko poslovna fakulteta Maribor.

[22] Rice, J. A. (1995): Mathematical Statistics and Data Analysis. Belmont: Duxbury Press.

[23] Reedman, L., Robinson, M. (1997): An Improved Call-scheduling Method using Call History and Frame Information, Statistics Canada.

[24] Sims, M. J. (2001): An Introduction to Planing and Scheduling with Simulation. Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference.

[25] Stokes, S. L., Greenberg, B. S. (1990): A Priority Sistem to Improve Callback Success in Telephone Surveys. Proceedings of the Section on Survey Research Methods of the American Statistical Association, 742-747.

[26] Swires-Hennessy, E., Drake, M. (1992): The Optimum Time at Which to Conduct Survey Interviews. Journal of the Market Research Society, vol. 34, 61-72.

[27] Taha, H. A. (1987): Operations Research: An Introduction. New Jersey: Prentice Hall.

[28] The American Association for Public Opinion Research (2004): Standard Definitions: Final Dispositions of Case Codes and Outcome Rates for Surveys. 3rd edition. Lenexa, Kansas: AAPOR. Dostopno na `http://www.aapor.org/` (15. april 2005).

[29] Warde, W. (1989): Contacting the Farm Operator by Telephone: A Re-examination. Washington: U. S. Department of Agriculture, Research Report Number SRB-89-07.

[30] Weber, D., Burt, R. (1972): Who's Home When. Washington: U. S. Bureau of the Census.

[31] Weeks, M. F., Jones, R., Folsom, R., Benrud, C. (1980): Optimal Times to Contact Sample Households. Public Opinion Quarterly, vol. 44, 353-366.

[32] Weeks, M. F., Kulka R. A., Pierson, S. A. (1987): Optimal Call Scheduling for a Telephone Survey. Public Opinion Quarterly, vol. 51, 540-549.

[33] Vidav, I. (1987): Višja matematika I. Ljubljana: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

[34] Winston, W. L. (1994): Operations Research: Applications and Algotithms. Belmont, California: Duxbury Press.

[35] Zadnik Stirn, L. (2001): Metode operacijskih raziskav za poslovno odločanje. Novo mesto: Visoka šola za upravljanje in poslovanje Novo mesto.

PRILOGE

Priloga A:
Definicija matrične operacije: produkt vektorja z matriko

Naj bo $\underline{a}$ vektor dimenzije n in B matrika dimenzije $n \times m$. Definirajmo novo operacijo

$$\underline{\mathbf{a}} \odot \mathbf{B} = \mathbf{diag}(\underline{\mathbf{a}})\mathbf{B},$$

kjer je $diag(\underline{a})$ diagonalizacija vektorja $\underline{a}$:

$$diag(\underline{a}) = \underline{a}^T I$$

Operacija $\odot$ povzroči, da se vsi elementi i-te vrstice matrike B pomnožijo z i-to komponento vektorja $\underline{a}$.

Primer
Naj bosta vektor $\underline{a}$ in matrika B

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Potem je

$$\begin{aligned} \underline{a} \odot B = diag(\underline{a})B &= diag\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} \\ a_3 b_{31} & a_3 b_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Priloga B:
Definicija matrične operacije: produkt dveh matrik

Naj bo matrika A dimenzije $n \times m$ in matrika B dimenzije $nm \times p$. Definirajmo novo operacijo

$$\mathbf{A} \boxdot \mathbf{B} = \mathbf{diag}(\mathbf{vec}(\mathbf{A}))\mathbf{B}$$

Operacija $vec(A)$ vektorizira matriko A po stolpcih, matrika $diag(vec(A))$ pa je diagonaliziran vektor $vec(A)$. Dimenzija diagonalne matrike $diag(vec(A))$ je $(nm) \times (nm)$.

Operacija $\boxdot$ povzroči, da se vrstice matrike B po vrsti pomnožijo z elementi po stolpcih matrike A.

Primer
Naj bosta matriki

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}$$

Potem je

$$\begin{aligned}
A \boxdot B = diag(vec(A))B &= diag\left(vec\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right)\right)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \\
&= diag\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} \\ a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} \\ a_{22}b_{41} & a_{22}b_{42} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$