# NEKATERI MODELI ZAPOSLOVANJA IN PROMOCIJE

Vesna Omladič
Fakulteta za družbene vede
Univerza v Ljubljani

V delu so predstavljeni nekateri modeli za obravnavo zaposlovanja in promocije, ki so bili uporabljani tudi pri reševanju teh problemov na raznih univerzah po svetu. Na osnovi enega od njih sta razvita dva nova modela, ki sta morda bližja realni situaciji na naših univerzah.

DESKRIPTORJI: zaposlovanje, promocija, markovski modeli, longitudinalni modeli

SOME MODELS OF MANPOWER RECRUITMENT AND PROMOTION: Some existent models of manpower recruitment and promotion are treated in this paper, models that have been used for solving these problems at various universities around the world. On the basis of one of them two new models are given that may be closer to the real situation at our universities.

KEYWORDS: manpower, recruitment, promotion, Markov models, longitudinal models

## 1. Uvod

Za obravnavo problemov najemanja in napredovanja delovne sile obstajajo mnoge metode in tudi na ožjem področju tovrstnih problemov na univerzitetnih populacijah se uporabljajo mnoge med njimi. Izbor konkretne metode bo seveda odvisen tako od same konkretne situacije na univerzi, kot tudi od problema, ki si ga zastavimo. Pogosto so te situacije tako specifične, da je potrebno obstoječe metode zanje vsaj prilagoditi, če že ne na novo razviti.

V tem delu bomo predstavili nekatere od metod, ki se uporabljajo pri reševanju takih nalog. V drugem razdelku bomo prikazali markovske modele zaposlovanja in promocije, v tretjem pa longitudinalne modele in opozorili na njihove prednosti v primeru optimizacijskih nalog. V četrtem razdelku bomo razgrnili poseben model z zveznim časom, na osnovi katerega bomo v petem in šestem razvili dva nova modela, s katerima se želimo približati realni situaciji na naših univerzah.

## 2. Markovski modeli

Pri markovskih modelih privzamemo, da je celotna populacija, oziroma *zaloga* ljudi, delujočih v našem sistemu, razdeljena na $k$ kategorij ali *razredov*. Naj bo $p_{ij}$ verjetnost, da bo oseba iz razreda $i$ v časovni enoti prešla v razred $j$, $w_i$ pa naj bo verjetnost, da član $i$-tega razreda v časovni enoti zapusti sistem. Te verjetnosti lahko razvrstimo v tabelo

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} & w_1 \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} & w_k \end{bmatrix}.$$

Najenostavnejši markovski model je stacionaren, pri katerem v bistvu privzamemo, da se osebe selijo med kategorijami med seboj neodvisno, neodvisno od pretekle "kariere", z istimi prehodnimi verjetnostmi, ki se s časom ne spreminjajo. Ker mora vsaka oseba bodisi ostati v istem razredu, se preseliti, ali oditi, je zgornja matrika *stohastična*, to pomeni, da za vsak indeks $i$ velja $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} + w_i = 1$ za vse $i$. Matrika $P = (p_{ij})$ je *prehodna matrika*, vektor $w = (w_j)$ pa *vektor izgub*. Poleg tega potrebujemo še *vektor najemanja* $r = (r_i)$, kjer $r_i$ pomeni verjetnost, da bo novo nastavljena oseba prišla v razred $i$. Omenimo naj, da za pojma vektor izgub in vektor najemanja uporablja Z. Lapajne termina vektor odliva in vektor priliva [3].

Namesto takega *verjetnostnega modela* pa lahko študiramo tudi analogen *deterministični model*. V tem primeru se ljudje selijo med razredi, se nastavljajo in odhajajo ne samo z istimi verjetnostmi, temveč v konstantnih deležih. Število $p_{ij}$ tu pomeni delež oseb iz razreda $i$, ki se mora preseliti v eni časovni enoti v razred $j$. Podobno so $w_j$ in $r_i$ deleži odhajajočih in na novo najetih oseb po razredih v eni časovni enoti.

Naj $n_j(T)$ označuje *zalogo*, to je število ljudi, ki so v trenutku $T$ v $j$-tem razredu sistema, $n_{ij}(T)$ pa *tok*, to je število ljudi, ki v času od $T$ do $T+1$ preidejo iz $i$-tega v $j$-ti razred. Označimo še z $n_{0j}(T)$ zalogo najemanja, to je število ljudi, ki jih v času od $T$ do $T+1$ sprejmemo v razred $j$ sistema in z $n_{i0}(T)$ izgubo, to je število tistih, ki so v tem času zapustili $i$-ti razred in hkrati sistem; tedaj je

$$n_j(T) = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}(T-1) + n_{0j}(T-1). \tag{1}$$

Količine $n_j$ in $n_{ij}$ so v stohastičnem modelu seveda slučajne spremenljivke, zato jih lahko povprečimo ter dobimo

$$\overline{n_j}(T) = \sum_{i=1}^{k} \overline{n_i}(T-1)p_{ij} + r_j\overline{R}(T-1), \tag{2}$$

kjer je $\overline{R}(T-1)$ povprečna celotna količina najete delovne sile v času od $T-1$ do $T$. Če je $\overline{R}(T)$ konstanten, ima ta enačba lahko stacionarno rešitev, to je vektor $n$, ki zadošča enačbi $n = \overline{R}r(I-P)^{-1}$.

Tu smo videli, kako se stohastična enačba (1) spremeni v deterministično (2), ko jo povprečimo. V enačbi (2) lahko namreč števila $p_{ij}$ tolmačimo kot resnični delež povprečne zaloge $i$-tega razreda, ki se v povprečju preseli v $j$-ti razred.

Tak model se da uporabiti tudi pri študiju zaposlovanja in promocije univerzitetnih učiteljev. Na tak način ga je, denimo, uporabil Branchflower še leta 1970 na konkretnih podatkih z Universe v Berkleyju (cit. po [2]). Učitelje te universe je razdelil v 13 razredov (4 docentski, 3 v rangu izrednega in 6 v rangu rednega profesorja). Za osem zaporednih let (od 1. julija 1960 do 1. julija 1968) je imel zbrane podatke o številu ljudi, ki so v vsakem od teh let prešli iz enega v drug razred, ter za tiste, ki so bili v tem letu bodisi na novo najeti, ali pa so odšli z univerze. Te podatke je nato seštel ter prišel na ta način do sumarnih, oziroma povprečnih deležev.

Od vseh možnih tovrstnih modelov je najlažje obravnavati model z konstantno velikostjo. V tem modelu privzamemo, da je skupna količina novonajetih oseb enaka skupni izgubi, torej

$$R(T-1) = \sum_{i=1}^{k} n_i(T-1)w_i,$$

to pa je v povprečju

$$\overline{R}(T-1) = \sum_{i=1}^{k} \overline{n_i}(T-1)w_i.$$

Ta model pa lahko hitro prilagodimo tudi za primer rasti sistema, le na desni moramo prišteti zalogo $M(T)$ tistih na novo najetih, ki ne nadomeščajo izgub. Tako dobimo iz enačbe (2) izpopolnjeno enačbo

$$\overline{n}(T) = \overline{n}(T-1)(P + w^T r) + M(T)r.$$

Branchflower je isračunal s pomočjo takega modela stacionarno porasdelitev učiteljev Universe v Berkleyju pri rasličnih stopnjah rasti te ustanove. Med drugim je ugotovil, da bi v primeru saustavljene rasti delež rednih profesorjev, ki je bil v letih 1960 do 1968 približno 60 %, srastel na 77 %, v primeru 3 %-nega letnega povečevanja pa bi ta odstotek padel na 50 %.

## 3. Longitudinalni modeli in optimisacija

Podobno kot v markovskih tudi v longitudinalnih modelih privsamemo, da so delavci danega sistema rasdeljeni v $k$ rasredov, sa povrh pa jih rasdelimo še v $n$ verig, ki jim pravimo navadno *kohorte*. Pri opasovanju gibanja študentske populacije bi lahko bili, denimo, rasredi sestavljeni is študentov vpisanih v posamesne letnike, kohorta pa bi, denimo, sdruževala vse študente s istim letom prvega vpisa. Kohort pa včasih ne priredimo posamesniku še kar ob prihodu v sistem, temveč šele kasneje na osnovi njegove kariere osiroma doseženega statusa v sistemu. Tudi te modele lahko obravnavamo bodisi deterministično, bodisi stohastično.

Longitudinalnih modelov saradi pomanjkanja prostora tu ne bomo podrobneje obravnavali. Navedimo le osnovno enačbo. Naj bo $g(T)$ vektor, katerega komponente pomenijo števila ljudi, ki vstopajo v sistem v trenutku $T$ in pripadajo posamesnim kohortam, $s(T)$ pa naj bo vektor salog v trenutku $T$, rasbitih po rasredih. Denimo, da je $g$ neodvisen od $T$. Če je tedaj $l_{ij}$ povprečno število časovnih enot bivanja oseb is $i$-te kohorte v $j$-tem rasredu in $L = [l_{ij}]$, je $s = gL$.

Pri študiju universitetnih kadrovskih tokov je tak model uporabljal, denimo, Oliver s sodelavci (prim. [2]). V enem od teh modelov so rasdelili populacijo študentov in učiteljev neke universe na 10 kohort v odvisnosti od njihove uspešnosti v sistemu. Najnižjo kohorto so sestavljali tisti, ki so odpadli še med prvimi leti študija, najvišjo pa tisti, ki so dobili polno saposlitev na universi po opravljenem doktoratu. Isto populacijo so rasdelili na 19 rasredov od bruca do rednega profesorja. Matriko $L$ so isračunali is eksperimentalnih podatkov. Enačba $s = gL$ omogoča enostavno določitev salog is danih velikosti kohort. Vendar bi bilo v tem primeru bolj sanimivo določiti kohorte (torej statusno "uspešnost") is snanih salog. Že sato, ker se dobi v tem primeru 19 enačb s 10 nesnankami, točna rešitev v takih primerih le redko obstaja. Zato se je treba sateči k oceni po metodi najmanjših kvadratov.

Ta model je uporaben tudi pri reševanju mnogih drugih problemov, še posebno pri problemih optimizacijske narave. Prednost tega modela pri reševanju takih nalog je med drugim v tem, da imajo v njem mnoge naravne omejitve (kot npr. "konstantno" ali "omejeno število podiplomskih študentov", ali pa "omejeno razmerje med učitelji in dodiplomskimi študenti") linearno obliko kar omogoča, da pri iskanju optimalnih strategij uporabljamo dobro preizkušene linearne optimizacijske metode, kakršna je denimo linearno programiranje.

Med tovrstnimi pristopi naj omenimo model Grinolda in Marshalla. V njunem modelu je bilo za razliko od prejšnjega razredov manj kot kohort. Iskala sta optimalno število zaposlenih neke fakultete razporejenih po statusnih kohortah. Za kriterij optimiziranja sta vzela stroške, ki jih ima fakulteta s svojimi delavci v odvisnosti od razreda zaposlitve. Pri iskanju optimalne strategije (to je razporeditve učiteljev po statusnih kohortah) sta uporabila linearno programiranje.

## 4. Pristop z zveznim časom

Včasih je koristno v modelu privzeti, da je čas zvezen. Tu se bomo posvetili modelu te vrste, ki ga je vpeljal Morgan s sodelavci (prim. [1]). Privzemimo zaradi enostavnosti, da imamo le eno možnost promocije. Posamezniki vstopajo v sistem (spet zaradi enostavnosti) s konstantno hitrostjo $R$, odhod kateregakoli člana sistema pa se podreja isti funkciji $G(x)$, ki v kateremkoli trenutku pomeni delež trenutnih članov sistema izmed tistih, ki so vanj vstopili $x$ enot časa pred tem trenutkom. V časovnem intervalu $(0, \delta x)$ bo torej vstopilo v sistem $R\delta x$ ljudi, od katerih jih bo po poteku časa $x$ v sistemu še $RG(x)\delta x$. Tako je torej povprečna dolžina službe (oz. delovni staž)

$$\mu = \int_0^K G(x)\, dx,$$

kjer je $K$ najdaljša možna dolžina službe. Zato je skupna zaloga enaka $N = R\mu$. Koeficient izgub sistema je enak koeficientu najemanja, torej je $w = \frac{R}{N} = \mu^{-1}$. Vsak zaposleni ima eno možnost promocije v trenutku $T$ po vstopu v sistem. Verjetnost promoviranja v višji razred ob tej priliki označimo z $\beta$; posameznik, ki ni promoviran, ostane za vselej v nižjem razredu. Celotni delež vseh zaposlenih v višjem razredu je zato

$$\gamma = \frac{1}{N}\beta R \int_T^K G(x)\, dx = \beta w \int_T^K G(x)\, dx.$$

Glavna pomanjkljivost tega modela je, da ne upošteva morebitne rasti oziroma krčenja sistema. To lahko najlažje popravimo z uvedbo nekonstantne hitrosti najemanja $R(x)$. S tem pa postane model načeloma nestacionaren. V trenutku $t$ je namreč v sistemu delež $G(x)$ posameznikov izmed tistih, ki so bili najeti $x$ časovnih enot pred tem, torej v trenutku $t-x$, takrat pa je bila hitrost najemanja enaka $R(t-x)$. Zato je v časovnem intervalu $(t, t+\delta x)$ v sistemu natanko $R(t-x)G(x)\,\delta x$ ljudi izmed tistih, ki so bili najeti v intervalu $(t-x, t-x+\delta x)$. S hitrostjo najemanja pomnoženo funkcijo deležev $RG(x)$ moramo torej v vseh zgornjih formulah zamenjati s funkcijo $S_t(x) = R(t-x)G(x)$, ki ima pomen časovne gostote zaloge ljudi s stažem $x$ v trenutku $t$. Formule se nekoliko poenostavijo, če privzamemo, da ima hitrost najemanja konstantno intenzivnost $\alpha$. Tedaj je $R(x) = Re^{\alpha x}$ in zato $S_t(x) = Re^{\alpha(t-x)}G(x) = e^{\alpha t}S_0(x)$. Skupna zaloga v času $t$ je seveda odvisna od $t$, saj je

$$N_t = Re^{\alpha t}\int_0^K e^{-\alpha x}G(x)\,dx = e^{\alpha t}N_0,$$

toda delež promoviranih je od časa neodvisen:

$$\gamma = \frac{1}{N_t}\beta Re^{\alpha t}\int_T^K e^{-\alpha x}G(x)\,dx = \beta\frac{\int_T^K S_0(x)\,dx}{\int_0^K S_0(x)\,dx}\,.$$

Modelom, kot je ta, v katerem se skupna zaloga sicer spreminja, vendar ob konstantnih deležih posameznih razredov, pravijo pogosto *kvazistacionarni modeli*.

Tu opisani model so uporabili pri obravnavi promocijskih strategij na britanskih univerzah. Ob predpostavkah $T = 17$, $K = 40$, $G(x) = e^{-0{,}02x}$ (ki pomenijo seveda dokajšnjo poenostavitev realne situacije) so pri različnih intenzivnostih rasti najemanja $\alpha$ računali, s kakšno verjetnostjo $\beta$ naj promovirajo posameznike v (redne) profesorje, da bi ostal njihov delež $\gamma$ konstanten, denimo na 0,12. V stacionarnem primeru ($\alpha = 0$) so dobili $\beta = 0,25$, v primeru naraščanja ($\alpha = 3\%$) se je ta verjetnost povečala na $\beta = 0,36$, v primeru krčenja ($\alpha = -3\%$) pa se je zmanjšala na $\beta = 0,19$.

Kot zanimivost naj omenimo, da so dobili zelo sorodne rezultate tudi pri bolj realnih predpostavkah, kar daje vtis, da je ta metoda zelo stabilna.

## 5. Model 1: Avtomatična promocija z zamikom

Razvijmo zdaj na osnovi Morganovega modela nov model, prilagojen naši situaciji. V sistemu opazujmo tri razrede: docente, izredne in redne profesorje. Za enoto časa vzemimo dolžino enega reelekcijskega obdobja, posamezniku pa dovolimo, da v sistemu prebije največ šest teh obdobij. Vsak na novo nastavljeni je najprej docent, ki ima po prvem obdobju možnost, da je z verjetnostjo $\beta_{izr}$ povišan v izrednega profesorja, če pa ne, postane na naslednji reelekciji to avtomatično. Vsakdo, ki postane izredni profesor, se ob prvi naslednji reelekciji promovira v rednega profesorja z verjetnostjo $\beta_{red}$, če pa ne, postane to avtomatično ob prvi priliki po tej. Redni profesor ostane v tem razredu do svojega odhoda iz sistema. Privzeli bomo, da sistem raste s konstantno intenzivnostjo $\alpha$, zato je kvazistacionaren. Vse količine bomo računali v trenutku $t = 0$, dobljeni deleži pa bodo tako ali tako konstantni. Časovno razporeditev zaloge ljudi s stažem dolžine $x$ v trentku $t = 0$ označimo kar z $S(x) = R(-x)G(x) = Re^{-\alpha x}G(x)$. Tedaj so količine celotne zaloge, ter zaloge docentov, izrednih in rednih profesorjev v sistemu enake:

$$N = \int_0^6 S(x)\,dx,$$

$$N_{doc} = \int_0^1 S(x)\,dx + (1-\beta_{izr})\int_1^2 S(x)\,dx,$$

$$N_{izr} = \beta_{izr}\int_1^2 S(x)\,dx + (1-\beta_{izr}+\beta_{izr}(1-\beta_{red}))\int_2^3 S(x)\,dx$$
$$+ (1-\beta_{izr})(1-\beta_{red})\int_3^4 S(x)\,dx,$$

$$N_{red} = \beta_{izr}\beta_{red}\int_2^3 S(x)\,dx + (\beta_{izr}+\beta_{red}-\beta_{izr}\beta_{red})\int_3^4 S(x)\,dx + \int_4^6 S(x)\,dx.$$

Te formule pa lahko močno poenostavimo, če vpeljemo deleže zalog sistema v $i$-tem reelekcijskem obdobju:

$$\delta_i = \frac{1}{N}\int_{i-1}^{i} S(x)\,dx;$$

za deleže docentov, izrednih in rednih profesorjev tako dobimo:

$$\delta_{doc} = \frac{N_{doc}}{N} = \delta_1 + (1-\beta_{izr})\delta_2,$$

$$\delta_{izr} = \frac{N_{izr}}{N} = \beta_{izr}\delta_2 + (1-\beta_{izr}\beta_{red})\delta_3 + (1-\beta_{izr})(1-\beta_{red})\delta_4,$$

$$\delta_{red} = \frac{N_{red}}{N} = \beta_{izr}\beta_{red}\delta_3 + (\beta_{izr}+\beta_{red}-\beta_{izr}\beta_{red})\delta_4 + \delta_5 + \delta_6.$$

Denimo, da želimo fiksirati deleže posamesnih rasredov $\delta_{\mathrm{doc}}$ , $\delta_{\mathrm{izr}}$ in $\delta_{\mathrm{red}}$ . Tedaj lahko iz prve enačbe izračunamo, s kakšno verjetnostjo $\beta_{\mathrm{izr}}$ moramo promovirati docente v izredne profesorje na njihovi prvi reelekciji, da bomo dosegli delež $\delta_{\mathrm{doc}}$ . Hitro izračunamo, da je

$$\beta_{\mathrm{izr}} = \frac{\delta_1 + \delta_2 - \delta_{\mathrm{doc}}}{\delta_2}.$$

Naravni omejitvi $0 < \beta_{\mathrm{izr}} < 1$ nam dasta $\delta_1 < \delta_{\mathrm{doc}} < \delta_1 + \delta_2$, kar nam pove, da smemo postaviti delež docentov nekje med celotnim deležem tistih posamesnikov v sistemu, ki so v svojem prvem reelekcijskem obdobju ter med celotnim deležem tistih, ki so v prvih dveh obdobjih. Drugačnih deležev v tako sastavljenem modelu ne moremo doseči. Ta omejitev je očitno v tem modelu selo naravna.

Če fiksiramo še delež isrednih (in s tem tudi delež rednih) profesorjev, bomo lahko iz sgornjih enačb dobili še verjetnost napredovanja v rednega profesorja

$$\begin{aligned}\beta_{\mathrm{red}} &= \frac{\beta_{\mathrm{izr}}\delta_2 + \delta_3 + (1-\beta_{\mathrm{izr}})\delta_4 - \delta_{\mathrm{izr}}}{\beta_{\mathrm{izr}}\delta_3 + (1-\beta_{\mathrm{izr}})\delta_4} \\ &= \frac{(\delta_1 + \delta_2 - \delta_{\mathrm{doc}})\delta_2 + \delta_2\delta_3 + (\delta_{\mathrm{doc}} - \delta_1)\delta_4 - \delta_2\delta_{\mathrm{izr}}}{(\delta_1 + \delta_2 - \delta_{\mathrm{doc}})\delta_3 + (\delta_{\mathrm{doc}} - \delta_1)\delta_4}.\end{aligned}$$

Poglejmo si, kaj nam v tem primeru povesta naravni omejitvi $0 < \beta_{\mathrm{red}} < 1$; dobimo

$$\delta_1 + \delta_2 - \delta_{\mathrm{doc}} + \frac{\delta_{\mathrm{doc}} - \delta_1}{\delta_2}\delta_3 < \delta_{\mathrm{izr}} < \delta_1 + \delta_2 - \delta_{\mathrm{doc}} + \delta_3 + \frac{\delta_{\mathrm{doc}} - \delta_1}{\delta_2}\delta_4.$$

Ta rezultat lahko razložimo takole: Spodnja meja deleža isrednih profesorjev je sestavljena iz dveh sumandov, prvi je delež učiteljev v prvih dveh reelekcijskih obdobjih, ki niso bili promovirani, drugi pa delež posamesnikov v tretjem obdobju pomnožen s verjetnostjo, da še niso bili promovirani, velja namreč $(\delta_{\mathrm{doc}} - \delta_1)/\delta_2 = 1 - \beta_{\mathrm{izr}}$. Če postavimo $\delta_{\mathrm{izr}}$ na to mejo, bomo kot rezultat dobili, da moramo vse isredne profesorje še na njihovi prvi reelekciji promovirati naprej v redne profesorje. Zgornja meja pa je sestavljena iz treh sumandov: nepromoviranih učiteljev prvih dveh obdobij, vseh učiteljev tretjega obdobja in učiteljev četrtega pomnoženih s verjetnostjo, da niso bili promovirani ob svoji prvi reelekciji. Postavitev $\delta_{\mathrm{izr}}$ na to mejo bi pomenila, da vse isredne profesorje promoviramo naprej šele na njihovi drugi reelekciji v tem nasivu. Obe meji sta torej selo naravni v okviru tako oblikovanega modela.

Če pa želimo kakšne bolj konkretne ocene in izračune, moramo naš model še bolj konkretizirati. Za funkcijo časovne razporeditve deležev izberimo zaradi enostavnosti $G(x) = e^{-\lambda x}$. Opozoriti moramo, da ta predpostavka ni povsem realna, saj nekateri podatki, zbrani na univerzah po svetu (prim. [1], [2] in tam citirane vire), kažejo na to, da je zapuščanje teh ustanov nekoliko bolj intenzivno med mlajšimi sodelavci ter med tistimi, ki se že približujejo zgornji meji dolžine službovanja, medtem ko je v "srednjih letih" nekoliko nižja. Kljub temu je Morgan s sodelavci s tako predpostavko dobil rezultate, ki so dokaj blizu realnim (gl. [1]). Odločiti se je treba še za intenzivnost izgub (to je povprečno število odhodov na časovno enoto). Izbrali bomo letno intenzivnost $\lambda = 2\%$, kar pomeni intenzivnost glede na eno reelekcijsko obdobje $\lambda' = 10\%$. Vse izračune bomo opravili pri različnih intenzivnostih hitrosti najemanja $\alpha$. V vseh tabelah bomo navajali letne intenzivnosti, medtem ko je v izračunih treba upoštevati intenzivnosti glede na reelekcijsko obdobje. Najprej izračunajmo deleže:

| $\alpha$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $\delta_4$ | $\delta_5$ | $\delta_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3% | 0,2847 | 0,2217 | 0,1727 | 0,1345 | 0,1047 | 0,0816 |
| 0% | 0,2109 | 0,1908 | 0,1727 | 0,1563 | 0,1414 | 0,1279 |
| -3% | 0,1465 | 0,1541 | 0,1620 | 0,1703 | 0,1790 | 0,1882 |

Pri tem smo upoštevali, da je za vse $i$

$$\delta_i = \frac{\int_{i-1}^{i} S(x)\,dx}{\int_0^6 S(x)\,dx} = \frac{e^{-(i-1)(\lambda'+\alpha')} - e^{-i(\lambda'+\alpha')}}{1 - e^{-6(\lambda'+\alpha')}} .$$

Opozorimo naj, da so deleži v tej tabeli zaokroženi le na štiri decimalke, medtem ko bodo vsi nadaljnji izračuni opravljeni z bolj natančnimi števili. Iz tabele vidimo, da tvorijo pri konstatnem najemanju docentov (srednja vrstica) posamezniki iz prvega reelekcijskega obdobja največjo skupino, deleži posameznih časovnih skupin pa se nato zmanjšujejo proti zadnjemu reelekcijskemu obdobju. Če najemanje pospešimo (prva vrstica), postanejo ta razmerja še bolj kontrastna, če pa ga zaviramo celo z večjo intenzivnostjo, kot je intenzivnost izgub, pri čemer se seveda populacija začne zmanjševati (zadnja vrstica), pa se razmerja obrnejo in populacija se postara.

Oglejmo si zdaj skrajne meje, ki jih lahko predpišemo kot deleže docentov ter srednjo vrednost teh mej (vsi rezultati so spet zaokroženi na štiri decimalke)

| delež docentov | $\alpha = 3\%$ | $\alpha = 0\%$ | $\alpha = -3\%$ |
|---|---|---|---|
| spodnja meja | 0,2847 | 0,2109 | 0,1465 |
| zgornja meja | 0,5065 | 0,4018 | 0,3006 |
| sredina | 0,3956 | 0,3063 | 0,2236 |

Kot vidimo je v tem modelu le malo možnosti za vodenje politike promoviranja, ki bi bistveno vplivala na delež docentov v sistemu. So pa te možnosti razumljivo nekoliko večje v pogojih pospešenega najemanja, ko je razlika med obema mejama večja od 22%, kot pa v pogojih krčenja, ko komaj presega 15%. V zadnji vrstici smo izračunali še srednji delež docentov, to je tisti, ki ga dobimo pri promocijski verjetnosti $\beta_{izr} = 0,5$. Pri tej verjetnosti izračunajmo še meje deležev izrednih profesorjev.

| delež izr. prof. | $\alpha = 3\%$ | $\alpha = 0\%$ | $\alpha = -3\%$ |
|---|---|---|---|
| spodnja meja | 0,1972 | 0,1818 | 0,1580 |
| zgornja meja | 0,3508 | 0,3462 | 0,3241 |

Opazimo, da so možnosti upravljanja s tem deležem (ob fiksnem deležu docentov na sredini) spet majhne, pa tudi manj odvisne od hitrosti najemanja. Po drugi strani pa sam delež zalog tega razreda ob konstantni promocijski politiki s krčenjem najemanja nekoliko pada. V vsakem primeru je skupna vsota deležev docentov in izrednih profesorjev v tem modelu razmeroma majhna, zato si oglejmo še kako je z (absolutno) najmanjšim in največjim možnim deležem rednih profesorjev.

| delež red. prof. | $\alpha = 3\%$ | $\alpha = 0\%$ | $\alpha = -3\%$ |
|---|---|---|---|
| spodnja meja | 0,1863 | 0,2693 | 0,3672 |
| zgornja meja | 0,4935 | 0,5982 | 0,6994 |

Pri deležih rednih profesorjev je možnost vodenja mnogo večja, vendar se ob povečanem najemanju rahlo zmanjša. Hkrati je jasno, da je v tem modelu ta razred največji in se ob krčenju sistema še bolj poveča.

## 6. Model 2: Nespremenljiva verjetnost promocije

Model, ki smo ga opisali v prejšnjem razdelku, morda ni daleč od situacije na mnogih fakultetah in oddelkih Univerze v Ljubljani v zadnjem času. Prav v zadnjih dveh letih pa prihaja pri nas do določenih premikov v promocijski politiki. Ena od novih idej je ocenjevanje in točkovanje del posameznega učitelja ob vsaki možnosti promocije, neodvisno od tega, katero reelekcijo ima posameznik v istem nazivu. Če bi se taka politika dosledno izvajala, bi ji morda bolje ustrezal naslednji model.

Spet privzamemo, da je vsak začetnik docent, vendar pa ima tokrat vsak docent na katerikoli reelekciji možnost, da bo z verjetnostjo $\beta_{izr}$ promoviran v izrednega profesorja, sicer pa bo ostal v istem nazivu še naprej. Podobno naj bo verjetnost, da je izredni profesor na katerikoli reelekciji promoviran v rednega, vselej enaka $\beta_{red}$ . Ostali privzetki naj bodo isti kot v prejšnjem modelu. Za deleže teh treh razredov dobimo tokrat naslednje formule:

$$\delta_{\mathrm{doc}} = \sum_{k=1}^{6} (1-\beta_{\mathrm{izr}})^{k-1}\delta_k,$$

$$\delta_{\mathrm{izr}} = \frac{\beta_{\mathrm{izr}}}{\beta_{\mathrm{izr}}-\beta_{\mathrm{red}}} \sum_{k=2}^{6} \left[(1-\beta_{\mathrm{red}})^{k-1} - (1-\beta_{\mathrm{izr}})^{k-1}\right]\delta_k,$$

$$\delta_{\mathrm{red}} = \sum_{k=3}^{6} \phi_k\delta_k,$$

kjer je

$$\phi_k = 1 - \frac{\beta_{\mathrm{red}}(1-\beta_{\mathrm{izr}})^{k-1} - \beta_{\mathrm{izr}}(1-\beta_{\mathrm{red}})^{k-1}}{\beta_{\mathrm{izr}}-\beta_{\mathrm{red}}}.$$

Ker so osnovne predpostavke iste kot v prejšnjem razdelku, lahko tudi osnovne deleže $\delta_i$ izračunamo po istih formulah. Te deleže lahko vstavimo v zgornje formule. Če zdaj fiksiramo delež docentov v sistemu $\delta_{\mathrm{doc}}$, postane prva od teh formul enačba pete stopnje za neznanko $(1-\beta_{\mathrm{izr}})$. Zanimajo nas seveda samo ničle tega polinoma, ki ležijo na intervalu med 0 in 1. V prvem mejnem primeru ($\beta_{\mathrm{izr}} = 1$) postane ta delež enak $\delta_1$, v drugem ($\beta_{\mathrm{izr}} = 0$) pa je $\delta_{\mathrm{doc}} = 1$. Če postavimo delež docentov na katerokoli vmesno točko, bo imel polinom vsaj eno ničlo na zahtevanem intervalu. Ker pa so vsi koeficienti tega polinoma razen konstantnega pozitivni, bo to tudi edina pozitivna ničla tega polinoma. Poleg minimalnega deleža docentov zapišimo v spodnjo tabelo še iskano verjetnost promocije pri tretjinskem deležu docentov. Ničle polinoma smo dobili s sekantno metodo.

| docenti | $\alpha = 3\%$ | $\alpha = 0\%$ | $\alpha = -3\%$ |
|---|---|---|---|
| spodnja meja | 0,2847 | 0,2109 | 0,1465 |
| $\beta_{\mathrm{izr}}$ pri $\delta_{\mathrm{doc}} = \frac{1}{3}$ | 0,8128 | 0,5924 | 0,4516 |

Kot vidimo, je konstantna verjetnost promocije v izrednega profesorja, s katero želimo doseči tretjinski delež docentov bistveno odvisna od sprememb v intenzivnosti najemanja. V primeru pospešenega najemanja je že minimalni delež docentov zelo blizu tretjine, zato je treba ob vsaki reelekciji promovirati kar 81% docentov, da ne bi njihov delež zrastel preko trejine. V primeru krčenja pa pade minimalni delež docentov pod 15%, zato bomo njihov tretjinski delež zagotovili že z mnogo manjšim 45%-nim promoviranjem. Pri tretjinskem deležu docentov izračunajmo še minimalni delež izrednih profesorjev ter verjetnost promocije $\beta_{\mathrm{red}}$, ki nam bo držala še preostala deleža v fiksnem razmerju (kot primer bomo vseli, da so kar vsi deleži trejinski). Hitro ugotovimo, da je neznanka $x = 1 - \beta_{red}$ ničla naslednjega polinoma:

$$\delta_6 x^4 + [\delta_5 + (1-\beta_{izr})\delta_6]x^3 + [\delta_4 + (1-\beta_{izr})\delta_5 + (1-\beta_{izr})^2\delta_6]x^2$$
$$+ [\delta_3 + (1-\beta_{izr})\delta_4 + (1-\beta_{izr})^2\delta_5 + (1-\beta_{izr})^3\delta_6]x$$
$$+ [\delta_2 + (1-\beta_{izr})\delta_3 + (1-\beta_{izr})^2\delta_4 + (1-\beta_{izr})^3\delta_5 + (1-\beta_{izr})^4\delta_6] = \frac{\delta_{izr}}{\beta_{izr}}.$$

V pomoč pri računanju tega polinoma nam je lahko, če opazimo, da so izrazi v oglatih oklepajih ravno enaki izrazom v spodnji vrstici Hornerjevega algoritma pri vstavljanju ničle $1 - \beta_{izr}$ v prejšnji polinom pete stopnje. Če smo torej prejšnjo ničlo iskali po kateri od običajnih numeričnih metod (bisekcija, sekantna metoda, Newtonova metoda), potem imamo te koeficiente že izračunane. Ko ugotovimo minimalni in maksimalni možni delež izrednih profesorjev v tem primeru, ima pri vsakem vmesnem deležu ta polinom četrte stopnje natanko eno ničlo na intervalu med 0 in 1. Dobljeni rezultat ob zgornjih predpostavkah je:

| izredni profesorji | $\alpha = 3\%$ | $\alpha = 0\%$ | $\alpha = -3\%$ |
|---|---|---|---|
| spodnja meja | 0,2110 | 0,1779 | 0,1538 |
| $\beta_{red}$ pri $\delta_{doc} = \delta_{izr} = \frac{1}{3}$ | 0,5205 | 0,4505 | 0,4076 |

Podobno kot v modelu iz prejšnjega razdelka so tudi tu rezultati za izredne profesorje precej bolj neodvisni od sprememb politike zaposlovanja, kot za docente. Tudi minimalni delež s krčenjem zaposlovalnih možnosti pada podobno kot v prejšnjem modelu. Promocijska verjetnost pri fiksnih tretjinskih deležih pada od 52% pri močnem naraščanju do 41% pri krčenju, kar pomeni, da bi se pri fiksni promocijski verjetnosti $\beta_{red}$ s krčenjem zaposlovalnih možnosti tudi ta razred smanjševal. Tudi ta podatek ima isti predznak kot v prejšnjem modelu.

Zanimivo bi bilo oba modela, razvita v teh dveh razdelkih, preizkusiti na konkretnih podatkih s naših univerz. V tem primeru bi ju bilo morda treba in tudi možno še ustrezno dopolniti in nadalje približati realni situaciji. Med drugim bi bilo morda treba zaradi dostopnosti podatkov zamenjati reelekcijsko obdobje kot časovno enoto s študijskim letom in ustrezno prilagoditi zgoraj dobljene formule.

**Literatura**

[1] D. J. Bartholomew, A. W. Forbes, Statistical techniques for manpower planning, John Wiley, 1979

[2] R. C. Grinold, K. T. Marshall, Manpower planning models, Elsevier North-Holland, New York, 1977

[3] Z. Lapajne, Študijska pot kot markovska veriga. V: E. Stergar (ur.), Proučevanje študijske poti študentov v SRS, Zbornik, Generacija 1976, Center za razvoj univerze, Ljubljana, 1988, str. 420-452