Vojko Antončič
Inštitut za sociologijo

ENODOBNI PLANSKI RACUN
ZA VELIKOST IN SESTAVO POPULACIJE

Rešujemo takle problem: Vemo, kakšna je sestava populacije na začetku in kakšna naj bo na koncu planske dobe. Vprašujemo, kolikšne morajo biti relativne prehodne frekvence in kolikšni morajo biti eksterni dotoki v posamezne dele populacije, da bo populacija evolvirala v ciljno sestavo.

planiranje, linearno programiranje, transportni problem

CONTROLLING THE SIZE AND THE COMPOSITION OF A POPULATION

It is shown how to determine the recruitment and the transition rates to attain a required size and composition of the population.

manpower planning, linear programming, transportation problem

1. UVOD

Denimo, da analiziramo, kako se spreminja velikost in sestava dane populacije, recimo agregat oseb, ki so zaposlene v kakem podjetju. Na časovnem horizontu določimo ekvidistantne točke $t_0, t_0 \pm h, t_0 \pm 2h, \ldots$; rečemo jim *inventurne* časovne točke. Brez škode za splošnost lahko postavimo $t_0=0$ in $h=1$. Potem so inventurne časovne točke $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Naj bo t ena izmed njih. Casovni interval $(t,t+1]$ imenujemo *doba t*. V inventurni časovni točki t ima analizirana populacija »vrednost« $S(t)$ — to je množica oseb, ki v časovni točki t sestavljajo analizirano populacijo. Pravimo, da je $S(t)$ *stok* v inventurni časovni točki t. Razdelimo ga na paroma disjunktne razrede $A_i(t)$:

$$A_1(t) \cup A_2(t) \cup \ldots \cup A_m(t) = S(t)$$

$$A_i(t) \cap A_j(t) = \emptyset \qquad (i,j=1,2,\ldots,m;\ i \neq j)$$

Za osebo, ki je v razredu $A_i(t)$, rečemo tudi, da je v inventurni časovni točki t v *stanju* A_i. Stok $S(t)$ popišemo z vektorjem

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

Komponente vektorja $y(t)$ so naravna števila: število $y_i(t)$ pove, koliko oseb iz stoka $S(t)$ je v stanju A_i. Sestavo stoka na koncu dobe t lahko dobimo po formuli

$$y(t+1) = P(t)y(t) + x(t) \tag{1}$$

Pri tem je $P(t) = [P_{ij}(t)]$ *prehodna matrika* za dobo t: $P_{ij}(t)$ je relativna prehodna frekvenca iz stanja A_j v stanje A_i v dobi t $(i,j=1,2,\dots,m)$. Vektor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m(t) \end{bmatrix}$$

popisuje eksterni dotok v stok $S(t)$ v dobi t, ali drugače povedano, vektor $x(t)$ popisuje sestavo kohorte

$$\mathbb{C}(t) = S(t+1) - S(t)$$

se pravi, $x_i(t)$ je število oseb iz kohorte $\mathbb{C}(t)$, ki so v stanju A_i.

2. PROBLEM

Vzemimo, da imamo takole situacijo: Vemo, kakšna je sestava stoka na začetku in kakšna *naj* bo na koncu dobe t. Poleg tega poznamo vektor

$$\rho(t) = \begin{bmatrix} P_{01}(t) \\ P_{02}(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{0m}(t) \end{bmatrix}$$

To je vektor, ki popisuje odtok iz stoka $S(t)$: relativna frekvenca $P_{0i}(t)$ pove, kolikšen del oseb, ki so na začetku dobe t v stanju A_i, preide v dobi t v eksterno stanje. Vprašujemo, kolikšne morajo biti relativne prehodne frekvence in kolikšni morajo biti eksterni dotoki v posamezne razrede, da bo

$$y(t+h) = \mathbf{b} \tag{2}$$

ko je

$$\rho(t) = \rho \qquad \text{in} \qquad y(t) = \mathbf{a}$$

Pravimo, da je to *enodobni planski problem.*

Zahteva (2) med drugim pomeni, da mora biti na koncu planske dobe velikost stoka enaka $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$. Iz formule (1) sledi, da mora biti zato

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = (\mathbf{b}, \mathbf{e}) - (\mathbf{a}, P^T\mathbf{e}) \tag{3}$$

Pri tem je (,) oznaka za skalarni produkt dveh vektorjev in $\mathbf{e}$ oznaka za vektor enic. Ker imamo samo en vhodni vektor in samo eno prehodno matriko, namesto $\mathbf{x}(t)$ pišemo kar $\mathbf{x}$ in namesto $\mathbf{P}(t)$ kar $\mathbf{P}$. Zaznamujmo

$$\frac{(\mathbf{b},\mathbf{e})}{(\mathbf{a},\mathbf{e})} = \theta \qquad \text{in} \qquad \theta - 1 = \delta$$

Razume se, da je $\theta > 0$ in zato $\delta > -1$. S kratkim računom dobimo iz (3) relacijo

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}) = \delta(\mathbf{a},\mathbf{e}) + (\mathbf{a},(\mathbf{I}-\mathbf{P}^T)\mathbf{e}) \tag{4}$$

Ker je

$$(\mathbf{I}-\mathbf{P}^T)\mathbf{e} = \boldsymbol{\rho} \tag{5}$$

lahko izrazimo relacijo (4) tudi takole

$$(\mathbf{x},\mathbf{e}) = (\mathbf{a},\delta\mathbf{e}+\boldsymbol{\rho})$$

Vpeljimo vektor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

To naj bo vektor, ki ustreza enačbi

$$(\mathbf{x},\mathbf{e})\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{x}$$

kar pomeni, da je

$$(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{e}) = 1 \tag{6}$$

Za velikost eksternega dotoka v i-ti razred potemtakem velja

$$\varepsilon_i(\mathbf{x},\mathbf{e}) = (\mathbf{a},\varepsilon_i[\delta\mathbf{e}+\boldsymbol{\rho}]) \tag{7}$$

Vpeljimo še vektorja

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Prvi naj ustreza enačbi

$$(\mathbf{a},\mathbf{e})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a}$$

drugi naj ustreza enačbi

$$(\mathbf{b},\mathbf{e})\boldsymbol{\beta} = \mathbf{b}$$

tako da je

$$(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{e}) = 1 \qquad \text{in} \qquad (\boldsymbol{\beta},\mathbf{e}) = 1$$

Skratka, komponente vektorjev $\boldsymbol{\alpha}$ in $\boldsymbol{\beta}$ so relativna števila — deleži: α_i je delež i-tega razreda v celotnem stoku na začetku planske dobe; b_i je predpisani delež i-tega razreda v celotnem stoku na koncu planske dobe. Če v (1) vstavimo vektorja a in b in upoštevamo (7), dobimo takle sistem enačb:

$$\sum_{j=1}^{m} [P_{ij} + \varepsilon_i(\delta + P_{0j})]a_j = \theta b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (8)$$

Torej: Da rešimo enodoben planski problem, moramo določiti nenegativne vrednosti P_{ij} in ε_i, ki ustrezajo enačbam (8) in hkrati zadostijo zahtevam (5) in (6).

3. REŠITEV PROBLEMA

Enodobni planski problem lahko prevedemo v transportni problem iz teorije linearnega programiranja. Gre za transportni problem z m+1 oddajnim mestom in z m sprejemnimi mesti. Definirajmo:

$$A_j = (1-P_{0j})a_j \qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

$$A_{m+1} = \delta + \sum_{j=1}^{m} P_{0j} a_j$$

V jeziku transportnega problema so to zaloge oddajnih mest. Nadalje naj bo

$$B_i = \theta b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

To pa so — rečeno v jeziku transportnega problema — zahteve sprejemnih mest. Velikost pretoka iz j-tega oddajnega mesta v i-to $(i=1,2,\ldots,m)$ sprejemno mesto je

$$Z_{ij} = \begin{cases} P_{ij} a_j & \text{za } j=1,2,\ldots,m \\ \varepsilon_i A_{m+1} & \text{za } j=m+1 \end{cases} \qquad (9)$$

Enačbe (8) preidejo zdaj v enačbe

$$\sum_{j=1}^{m+1} Z_{ij} = B_i \qquad (i=1,2,\ldots,m) \qquad (10)$$

Zahtevo (5) prevedemo v enačbe

$$\sum_{i=1}^{m} Z_{ij} = A_j \qquad (j=1,2,\ldots,m) \qquad (11)$$

zahtevo (6), ki ji morajo zadostiti vrednosti ε_i, pa prevedemo v enačbo

$$\sum_{i=1}^{m} Z_{i,m+1} = A_{m+1} \qquad (12)$$

Takoj se vidi, da je

$$\sum_{j=1}^{m+1} A_j = \sum_{i=1}^{m} B_i$$

To pomeni, da je v sistemu enačb (10), (11) in (12) ena enačba odveč. Zato lahko eno izpustimo, recimo enačbo (12). Enačbe (10) in (11) pa zapišimo v matrični obliki. S tem namenom najprej vpeljimo matriko

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ m\text{-ta vrstica} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad (m+1)\text{-ti stolpec} & \end{array}$$

Število vrstic v matriki $\mathbf{A}$ je enako $2m$, število stolpcev pa je enako $m \times (m+1)$. Za matrični zapis enačb (9) in (10) potrebujemo še vektorja

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \\ \vdots \\ Z_{1,m+1} \\ Z_{21} \\ Z_{22} \\ \vdots \\ Z_{2,m+1} \\ \vdots \\ Z_{m1} \\ Z_{m2} \\ \vdots \\ Z_{m,m+1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$$

Zapisane v matrični obliki se enačbe (10) in (11) glasijo

$$\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{b} \tag{13}$$

Treba je torej določiti vektorje

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0} \tag{14}$$

ki zadoščajo enačbi (13). Vsak vektor, ki ustreza enačbi (13) in pogojem nenegativnosti (14), vsebuje možno rešitev enodobnega planskega problema: po formuli (9) se iz koordinat vektorja $\mathbf{z}$ izračuna, kolikšne morajo biti relativne prehodne frekvence in kolikšni morajo biti eksterni dotoki v posamezne razrede.

Znano je (prim.: Kurepa, 1967; Vadnal, 1972), da je množica možnih rešitev sistema linearnih neenačb konveksna in zaprta. V večini praktičnih primerov je konveksni polieder, kar pomeni, da je omejena in da ima končno število ekstremnih točk. Množica

$$\mathbb{P} = \{\, \mathbf{z}\,;\ \mathbf{A}\mathbf{z}=\mathbf{b} \text{ in } \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \,\}$$

je torej konveksna in zaprta. Vzemimo, da je to konveksni polieder. V konveksnem poliedru je vsaka točka konveksna kombinacija poliedrovih ekstremnih točk. Ekstremna točka poliedra $\mathbb{P}$ je osnovna rešitev enačbe (13) pri pogoju (14). Polieder $\mathbb{P}$ je potemtakem konveksna lupina nenegativnih osnovnih rešitev enačbe (13). Zato je dovolj, da se določi osnovne rešitve planskega problema.

Planski problem se lahko formulira tudi kot problem optimalnosti. V takem primeru se definira nek smiselen linearen funkcional

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} y_{ij} z_{ij}$$

ki ga imenujemo *preferenčni kriterij*. Koeficienti y_{ij} so *preferenčne uteži*. Čim bolj »zaželjen« je dani pretok, tem večjo preferenčno utež se mu pripiše. Treba je ugotoviti, na katerih $\mathbf{z}$-jih iz množice $\mathbb{P}$ ima preferenčni kriterij maksimalno vrednost. Denimo, da je

$$\sup_{\mathbf{z} \in \mathbb{P}} \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}_0)$$

Potem je v vektorju $\mathbf{z}_0$ optimalna rešitev enodobnega planskega problema. Po metodi simpleksov se najde optimalno rešitev ali pa se ugotovi, da je $\mathbb{P}$ neomejena množica in da optimalna rešitev planskega problema ne ekstira.

4. LITERATURA

Grinold, R.C. in Stanford, R.E. (1976). »Optimal control of a graded manpower system.« Management Sci. B, 20.

Kurepa, S. (1967). Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene. Zagreb:

Tehnička knjiga.
Vadnal, A. (1972). Linearno programiranje: Teorija i upotreba u privredi. Zagreb: Informator.
Vajda S. (1977). »Maintainability and preservation of a graded population structure.« Management Sci.