FRANJO PROT
KSENIJA BOSNAR
FAKULTET ZA FIZIČKU KULTURU
SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

METODA ZA USPOREDBU DVIJU MATRICA KROSKORELACIJA

SAŽETAK

Odredjene pretpostavke o prirodi i strukturi relacija dva skupa karakteristika zahtijeva provjeru stabilnosti relacija u vremenu, kao i podudarnost na različitim uzorcima ispitanika. Problem komparativne analize relacija dva skupa varijabli može se svesti i na usporedbu dvije matrice kroskorelacija izmjerenih i registriranih varijabli. U ovom je radu predložena metoda za usporedbu dvije matrice kroskorelacija identičnih skupova varijabli. Usporedba struktura relacija izvedena je koeficijentima kongruencije lijevih svojstvenih vektora matrica kroskorelacija, koeficijentima kongruencije desnih svojstvenih vektora matrica kroskorelacija, omjerima svojstvenih vrijednosti, omjerom suma svojstvenih vrijednosti i omjerom produkata svojstvenih vrijednosti. Ova metoda je implementirana u obliku makroprograma napisanog u GENSTAT jeziku s primjerom na realnim podacima.

0. UVOD

Proučavanje relacija dva skupa karakteristika zahtijeva provjeru stabilnosti odnosa u vremenu, kao i podudarnost na različitim uzorcima ispitanika. Problem komparativne analize relacija dva skupa varijabli može se svesti i na usporedbu dvije matrice kroskorelacija registriranih varijabli.

Separatne analize matrica kroskorelacija razmatrane su i sa aspekta metoda faktorske analize (Horst, 1965), kao i sa aspekta metoda za analizu relacija dvaju skupova varijabli, kao na primjer kvazikanonička analiza kovarijanci (Momirović, Dobrić i Karaman, 1983) i često se primjenjuju.

U ovom je radu predložena metoda za usporedbu dviju matrica kroskorelacija identičnih skupova varijabli, bilo da su dva skupa karakteristika registrirani na jednom uzorku ispitanika u dvije različite vremenske točke, ili da su dva identična skupa karakteristika registrirana na dva različita uzorka ispitanika.

1. METODA

1.1. Uvodne napomene

Neka je $V_1 = \{v_{1j};\ j = 1,\ldots,m\}$ skup od m varijabli i neka je $V_2 = \{v_{2p};\ p = 1,\ldots k\}$; $m \geq k$ drugi skup varijabli sa manjim ili jednakim brojem članova.

Neka je $E_1 = \{e_{1i};\ i = 1,\ldots,n_1\}$ prvi skup entiteta i neka je $E_2 = \{e_{2l};\ l = 1,\ldots,n_2\}$ drugi skup entiteta sa n_1 odnosno n_2 člana.

Kartezijevim produktima

$$B_{11} \leftarrow E_1 \otimes V_1$$
$$B_{21} \leftarrow E_1 \otimes V_2$$
$$B_{12} \leftarrow E_2 \otimes V_1$$
$$B_{22} \leftarrow E_2 \otimes V_2$$

neka su odredjene matrice podataka koje opisuju prvi i drugi skup entiteta na prvom, odnosno drugom skupu varijabli.

Ako su

$$Z_{11} = (B_{11} - P_1 B_{11})\ n_1^{-1/2}$$
$$Z_{21} = (B_{21} - P_1 B_{21})\ n_1^{-1/2}$$
$$Z_{12} = (B_{12} - P_2 B_{12})\ n_2^{-1/2}$$

$$Z_{22} = (B_{22} - P_2 B_{22})\ n_2^{-1/2}$$

standardne normalne forme matrica B_{11}, B_{21}, B_{12} i B_{22} dobivene preko odgovarajućih centroidnih projektora

$$P_1 = 1_{n_1}(1_{n_1}^T 1_{n_1})^{-1} 1_{n_1}^T$$
$$P_2 = 1_{n_2}(1_{n_2}^T 1_{n_2})^{-1} 1_{n_2}^T$$

gdje su 1_{n_1} i 1_{n_2} sumacioni vektori sa n_1 i n_1 elemenata, tada su

$$R_1 = Z_{11}^T Z_{21}$$
$$R_2 = Z_{12}^T Z_{22}$$

matrice kroskorelacija varijabli iz V_1 i V_2 za skupove entiteta E_1 i E_2.

1.2. Bazična struktura

Spektralnom dekompozicijom neka se odredi bazična struktura od

$$R_1 = Y_1 \Lambda_1 X_1^T \qquad \begin{array}{|l} \Lambda_1 = \text{diag} = (\lambda_{1p});\ p = 1,\dots,k \\ \lambda_{11} \geq \lambda_{12} \geq \dots \geq \lambda_{1k} \\ X_1^T X_1 = X_1 X_1^T = I \\ Y_1^T Y_1 = I \end{array}$$

gdje su Λ_1 = dijagonalna matrica singularnih vrijednosti
Y_1 = matrica lijevih svojstvenih vektora
X_1 = matrica desnih svojstvenih vektora

i od

$$R_2 = Y_2 \Lambda_2 X_2 \qquad \begin{array}{|l} \Lambda_2 = \text{diag} = (\lambda_{2p});\ p = 1,\dots,k \\ \lambda_{21} \geq \lambda_{22} \geq \quad \geq \lambda_{2k} \\ X_2^T X_2 = X_2 X_2^T = I \\ Y_2^T Y_2 = I \end{array}$$

gdje su Λ_2 - dijagonalna matrica singularnih vrijednosti

Y_2 - matrica lijevih svojstvenih vektora

X_2 - matrica desnih svojstvenih vektora.

1.3. Mjere sličnosti matrica kroskorelacija

Na osnovu rezultata spektralnih dekompozicija moguće je izvesti mjere sukladnosti matrica kroskorelacija kao kongruence lijevih svojstvenih vektora od R_1 i R_2

$$Q_1 = Y_1^T Y_2,$$

kongruence desnih svojstvenih vektora od R_1 i R_2

$$Q_2 = X_1^T X_2,$$

omjere singularnih vrijednosti od R_1 i R_2,

$$L^* = \Lambda_1 / \Lambda_2$$

omjere suma singularnih vrijednosti od R_1 i R_2,

$$\rho = tr\ \Lambda_1 / tr\ \Lambda_2$$

i kao omjer produkata singularnih vrijednosti od R_1 i R_2

$$\delta = \det\Lambda_1 / \det\Lambda_2.$$

Bitna karakteristika ovih mjera jeste da jedino kada su istovremeno Q_1, Q_2 i L^* matrice identiteta, onda su dvije matrice kroskorelacije potpuno jednake. Naravno, visoka kongruentnost definirana bilo kojom pojedinačnom mjerom još uvijek nije dovoljna da dvije matrice kroskorelacija proglasimo jednakim. Interesantno je uočiti i činjenicu da Q_1 i Q_2 odredjuju i usporedbu vektora koji ekstremiziraju kanoničke koeficijente kovarijance (Momirović, Dobrić i Karaman, 1983) dvaju skupova varijabli.

Neke dodatne deskriptivne mjere sličnosti matrica kroskorelacija mogu se izvesti i samo na osnovu R_1 i R_2.

Posmatrajući matrice kroskorelacija kao pseudomatrice vektora redaka, odnosno vektora stupaca, pomoću matrica koje odredjuju sume kvadrata redaka od R_1

$$V_1^2 = \mathrm{diag}(R_1 R_1^T),$$

sume kvadrata stupaca od R_1

$$W_1^2 = \mathrm{diag}(R_1^T R_1),$$

sume kvadrata redaka od R_2

$$V_2^2 = \mathrm{diag}(R_2 R_2^T),$$

sume kvadrata stupaca od R_2

$$W_2^2 = \mathrm{diag}(R_2^T R_2),$$

moguće je izvesti mjere sličnosti matrica R_1 i R_2 kao kongruence redaka R_1 i R_2

$$K_1 = V_1^{-1}(R_1 R_2^T)V_2^{-1}, \text{ kao}$$

kongruence stupaca R_1 i R_2

$$K_2 = W_1^{-1}(R_1^T R_2)W_2^{-1}, \text{ kao}$$

omjer suma kvadrata redaka R_1 i R_2

$$\mu_1 = V_1^2/V_2^2,$$

i kao omjer suma kvadrata stupaca od R_1 i R_2

$$\mu_2 = W_1^2/W_2^2 .$$

Zanimljivo je uočiti da su mjere definirane u K_1 i K_2 istovremeno i kongruence odgovarajućih regresijskih vektora pod SRA (Stupid Regression Analysis) modelom regresijske analize (Štalec i Momirović, 1983).

2. PROGRAM STREL

Makroprogram STREL napisan je u GENSTAT jeziku, verzija 4.04, a pohranjen je u sistemskoj programskoj biblioteci SRCE*GENS-MACRO. računala UNIVAC 1100 Sveučilišnog računskog centra u Zagrebu.

Program je organiziran u nekoliko sekcija:

(1) deklaracije,

(2) izračunavanje
matrica lijevih svojstvenih vektora, matrica desnih svojstvenih vektora i singularnih vrijednosti matrica kroskorelacija, suma kvadrata redaka i kolona matrica kroskorelacija, koeficijenata kongruencije redaka, i kolona matrica kroskorelacija, koeficijenata kongruencije lijevih svojstvenih vektora, koeficijenata kongruencije desnih svojstvenih vektora, omjera singularnih vrijednosti, omjer tragova matrica singularnih vrijednosti i omjer produkata singularnih vrijednosti.

(3) ispis rezultata.

Za aktiviranje ovog programa potrebno je iz glavnog programa proslijediti u makro program slijedeće:

(1) dvije MATRIX strukture R1 i R2 u kojima se nalaze matrice kroskorelacija identičnih skupova varijabli,

(2) dvije NAME ili POINTER strukture PNTR i PNTC za identifikaciju varijabli te redaka i kolona izračunatih i ispisanih matrica.

```
GUARES*ANTRO(1).STREL/MAC
        'MACRO' STRELS
        ''
                NAPISALI I
                IMPLEMENTIRALI
                   F. PROT
                   K. BOSNAR
                FUNKCIJA
                   USPOREDBA DVIJU MATRICA KROSKORELACIJA DOBIVENIH
                NA ISTIM SKUPOVIMA VARIJABI PREKO
                   (1) KOEFICIJENATA KONGRUENCIJE REDOVA MATRICA
                       KROSKORELACIJA
                   (2) KOEFICIJENATA KONGRUENCIJEKOLONA MATRICA
                       KROSKORELACIJA
                   (3) OMJERA SUMA KVADRATA REDOVA MATRICA
                       KROSKORELACIJA
                   (4) OMJERA SUMA KVADRATA KOLONA MATRICA
                       KROSKORELACIJA
                   (5) KOEFICIJENATA KONGRUENCIJE LIJEVIH SVOJSTVENIH
                       VEKTORA MATRICA KROSKORELACIJE
                   (6) KOEFICIJENATA KONGRUENCIJE DESNIH SVOJSTVENIH
                       VEKTORA MATRICA KROSKORELACIJA
                   (7) OMJERA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI MATRICA
                       KROSKORELACIJA
                   (8) OMJERA TRAGOVA MATRICA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI
                       MATRICA KROSKORELACIJA
                   (9) OMJERA DETERMINANTI MATRICA SINGULARNIH VRIJEDNOS
                       MATRICA KROSKORELACIJA
                ZAHTIJEVI
                   IZ GLAVNOG PROGRAMA MAKRO STREL OCEKUJE
                   R1 = MATRICU KROSKORELACIJA VARIJABLI (1)
                   R2 = MATRICA KROSKORELACIJA VARIJABLI (2)
                 PNTR = POINTER ILI NAME VEKTOR SA IMENIMA VARIJABLI
                        (VECEG SKUPA)
                 PNTC = POINTER ILI NAME VEKTOR SA IMENIMA VARIJABLI
                        (MANJEG SKUPA)
        ''
        ''
                SEKCIJA 1.
                DEKLARACIJE I
                INICIJALIZACIJA
        ''
        'LOCAL'  SQR1,SQR2,SQC1,SQC2,CCR,CCC,OMSQR,OMSQC,
                 L1,Y1,X1,L2,Y2,X2,QY,QX,OML,OMTRL,OMDTL,
                 K,H1,H2,H3,H4,H5,H6,H7,H8,H9,H10,H11,H12,
                 H13,H14,H15,H16,H17,H18,H19,H20,H21,F1,F2,
                 SDL1,SDL2,DL1,DL2
        'START'
        'SCAL' K
        'CALC' K = NVAL(PNTC)
        'RUN'
        'HEAD' H1 = '' MATRICA KROSKORELACIJA R1 ''
          :    H2 = '' MATRICA KROSKORELACIJA R2 ''
          :    H3 = '' SINGULARNE VRIJEDNOSTI OD R1 ''
          :    H4 = '' SINGULARNE VRIJEDNOSTI OD R2 ''
          :    H5 = '' LIJEVI SVOJSTVENI VEKTORI OD R1 ''
          :    H6 = '' LIJEVI SVOJSTVENI VEKTORI OD R2 ''
          :    H7 = '' DESNI SVOJSTVENI VEKTORI OD R1 ''
          :    H8 = '' DESNI SVOJSTVENI VEKTORI OD R2 ''
          :    H9 = '' KONGRUENCE REDAKA OD R1 I R2 ''
          :    H10= '' KONGRUENCE KOLONA OD R1 I R2 ''
          :    H11= '' SUME KVADRATA REDAKA OD R1 ''
          :    H12= '' SUME KVADRATA REDAKA OD R2 ''
```

```
        :     H13= '' OMJER SUMA KVADRATA REDAKA OD R1 I R2 ''
        :     H14= '' SUME KVADRATA KOLONA OD R1 ''
        :     H15= '' SUME KVADRATA KOLONA OD R2 ''
        :     H16= '' OMJER SUMA KVADRATA KOLONA OD R1 I R2 ''
        :     H17= '' KONGRUENCE LIJEVIH SVOJSTVENIH VEKTORA Y1 I '
        :     H18= '' KONGRUENCE DESNIH SVOJSTVENIH VEKTORA X1 I X2
        :     H19= '' OMJER SINGULARNIH VRIJEDNOSTI L1 I L2 ''
        :     H20= '' OMJER SUMA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI ''
        :     H21= '' OMJER PRODUKTA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI ''
      'SCAL' OMTRL,OMDTL,DL1,DL2
      'SCAL' F1 = 8.3   :  F2 = 8.4
      'MATR'  CCR   $ PNTR,PNTR
        :     CCC   $ PNTC,PNTC
      'DIAG' SQR1,SQR2,OMSQR $ PNTR
        :    SQC1,SQC2,OMSQC $ PNTC
      'MATR' Y1,Y2 $ PNTR,K
        :    X1,X2 $ PNTC,K
        :    QY,QX $ K,K
      'DIAG' L1,L2,OML $ K
      'SYMM' SDL1,SDL2 $ K
      ''
            SEKCIJA 2.
            IZRACUNAVANJE
      ''
      'CALC'  SQR1 = PDTT(R1;R1)
        :     SQR2 = PDTT(R2;R2)
        :     SQC1 = TPDT(R1;R1)
        :     SQC2 = TPDT(R2;R2)
        :     CCR = PDTT(R1;R2)
        :     CCR = PDT(CCR;(1/SQRT(SQR2)))
        :     CCR = PDT((1/SQRT(SQR1));CCR)
        :     CCC = TPDT(R1;R2)
        :     CCC = PDT(CCC;(1/SQRT(SQC2)))
        :     CCC = PDT((1/SQRT(SQC1));CCC)
        :      OMSQR = SQR1 / SQR2
        :      OMSQC = SQC1 / SQC2
      'SVD' R1;L1;Y1;X1
      'SVD' R2;L2;Y2;X2
      'CALC'  QY = TPDT(Y1;Y2)
        :     QX = TPDT(X1;X2)
        :      OML = L1 / L2
        :      OMTRL = TRACE(L1) / TRACE(L2)
        :      SDL1 = L1
        :      SDL2 = L2
        :      DL1 = DET(SDL1)
        :      DL2 = DET(SDL2)
        :      OMDTL = DL1 /DL2
      ''
            SEKCIJA 3.
            ISPIS REZULTATA
      ''
      'PAGE'
      'CAPT' ''          S    T    R    E    L         ''
      'CAPT' ''   SLICNOST STRUKTURA RELACIJA U ''
      'CAPT' ''   DVIJE MATRICE KROSKORELACIJA  ''
      'PAGE'  'PRINT' H1 'PRINT' R1 $ F1
      'PAGE'  'PRINT' H3 'PRINT' L1 $ F2
      'PAGE'  'PRINT' H5 'PRINT' Y1 $ F1
      'PAGE'  'PRINT' H7 'PRINT' X1 $ F1
      'PAGE'  'PRINT' H2 'PRINT' R2 $ F1
      'PAGE'  'PRINT' H4 'PRINT' L2 $ F2
      'PAGE'  'PRINT' H6 'PRINT' Y2 $ F1
      'PAGE'  'PRINT' H8 'PRINT' X2 $ F1
```

```
'PAGE' 'PRINT' H9 'PRINT' CCP $ F1
'PAGE' 'PRINT' H10 'PRINT' CCC $ F1
'PAGE' 'PRINT' H11 'PRINT' SQR1 $ F1
'PAGE' 'PRINT' H12 'PRINT' SQR2 $ F1
'PAGE' 'PRINT' H13 'PRINT' OMSQR $ F1
'PAGE' 'PRINT' H14 'PRINT' SQC1 $ F1
'PAGE' 'PRINT' H15 'PRINT' SQC2 $ F1
'PAGE' 'PRINT' H16 'PRINT' OMSQC $ F1
'PAGE' 'PRINT' H17 'PRINT' QY $ F1
'PAGE' 'PRINT' H18 'PRINT' QX $ F1
'PAGE' 'PRINT' H19 'PRINT' OML $ F1
'PAGE' 'PRINT' H20 'PRINT' OMTRL $ F1
'PAGE' 'PRINT' H21 'PRINT' OMDTL $ F1
'CAPT' '' END OF STREL ''
'ENDMACRO/LOCAL=DESTROY'
```

3. NUMERIČKI PRIMJER

Aktiviranje i provjera funkcija makroprograma STREL provedena je na dvije matrice kroskorelacija identičnih indikatora socioekonomskih karakteristika i kognitivnih sposobnosti registriranih na komparabilnim uzorcima žena (n_1 = 375) i muškaraca (n_2 = 837).

Registrirane su 24 socioekonomske varijable:

OBRAZS	stupanj obrazovanja subjekta,
STRJEZS	znanje stranih jezika subjekta,
USPJEHS	školski uspjeh,
MJ15S	karakteristike mjesta u kome je subjekt proveo djetinjstvo,
MJSADA	karakteristike mjesta u kome subjekt sada živi,
OBRAZO	stupanj obrazovanja oca,
KVALIFO	kvalifikacija oca priznata na radnom mjestu,
STRJEZO	znanje stranih jezika oca,
MJ15O	karakteristike mjesta u kome je otac proveo djetinjstvc
POLRADO	položaj oca na radnom mjestu,
SAMOUPO	funkcija oca u samoupravnim organima,
DPZO	društveno-političke funkcije oca
OBRAZM	stupanj obrazovanja majke,
KVALIFM	kvalifikacija majke priznata na radnom mjestu,
STRJEZM	znanje stranih jezika majke,
MJ15M	karakteristike mjesta u kojem je majka provela djetinjstvo,
POLRADM	položaj majke na radnom mjestu,
SAMOUPM	funkcija majke u samoupravnim organima,

DPZM	društveno-političke funkcije majke,
PRIHOD	mjesečni prihod domaćinstva,
KOMFOR	kvaliteta stanovanja,
SOBAS	posjedovanje vlastite sobe,
KNJIGE	broj knjiga u porodičnoj biblioteci,
DJECA	broj djece u porodici,

i tri testa intelektualnih sposobnosti

GT-7	test sparivanja crteža Beatrice Dvořak, iz baterije GTAB*, namijenjen procjeni sposobnosti perceptivne identifikacije, koji se pokazao kao dobra mjera perceptivnog procesiranja,
α-4	test sinonima-antonima revidirane Army Alpha baterije F.L. Welsa, namijenjen procjeni verbalnog razumijevanja reprezentant serijalnog procesiranja,
IT-2	test opće vizualizacije Thurstonea i B. Dvořak, namijenjen procjeni specijalnih relacija, reprezentant paralelnog procesiranja.

Osnovne mjere sukladnosti strukturalnih odnosa reprezentirane matricama kroskorelacija bazirane su na rezultatima njihove spektralne dekompozicije, a prezentirane su u tabelama 1, 2 i 3. Lako se može uočiti da su matrica kongruencija lijevih svojstvenih vektora i matrica kongruencija desnih svojstvenih vektora različite od matrica identiteta, a omjeri pojedinačnih korespondentnih singularnih vrijednosti, omjer suma singularnih vrijednosti i omjer produkata singularnih vrijednosti različit od jedan. To ukazuje da postoje bitne razlike u odnosima varijabli u analiziranim matricama kroskorelacija. Naravno, detaljnija identifikacija nosilaca razlika potencijalno je moguća na osnovu dodatnih mjera koje izračunava i ispisuje makro program STREL.

Tabela 1. KONGRUENCE LIJEVIH SVOJSTVENIH VEKTORA

	1	2	3
1	.954	-.076	.074
2	.050	-.357	.027
3	.016	.269	-.011

* *General Aptitude Test Battery*

Tabela 2. KONGRUENCE DESNIH SVOJSTVENIH VEKTORA

	1	2	3
1	.979	-.154	-.134
2	.123	.968	.217
3	.163	.196	.967

Tabela 3. OMJERI SINGULARNIH VRIJEDNOSTI

1	2	3
.780	1.551	1.869

OMJER SUMA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI

.897

OMJER PRODUKATA SINGULARNIH VRIJEDNOSTI

2.295

4. LITERATURA

(1) Horst, P. (1965).
Factor analysis of data matrices.
Holt, Rinehart and Winston INC, New York.

(2) Momirović, K., V. Dobrić and Ž. Karaman (1983).
Canonical covariance analysis. Proceedings of 5ht International symposium "Computer at the University", Cavtat, 463-473.

(3) Štalec, J. and K. Momirović (1983).
Some properties of very simple model for robust regression analysis. Proceedings of 5th International symposium "Computer at the University", Cavtat, 453-461.